

■ ■ Vrai/Faux

On suppose que A et B , lorsqu'ils interviennent dans une question, sont deux événements non négligeables issus d'un même univers.

1. Dans la phrase : « La voiture est rouge ; calculer la probabilité que le conducteur soit un homme », on demande la probabilité de l'intersection des événements « la voiture est rouge » et « le conducteur est un homme ».

2. $P_B(A) = 1 - P_B(\bar{A})$.

3. Si $A \cap B = \emptyset$ alors A et B sont indépendants.

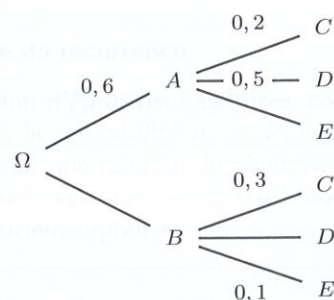
4. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

5. Si $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,2$ et $P(A \cap B) \approx 0,08$ alors A et B sont indépendants.

6. Si $P_B(A) = P(A)$ alors A et B sont indépendants.

7. Si A et B sont indépendants alors $P_B(A) = P_{\bar{B}}(A)$.

Nb : dans la suite les questions portent toutes sur la situation modélisée par l'arbre ci-dessous.



8. A et B sont incompatibles.

9. $P_B(D) = 0,4$.

10. B et D ne sont pas indépendants.

Vrai Faux

☐ ☐

☐ ☐

☐ ☐

☐ ☐

☐ ☐

☐ ☐

☐ ☐

☐ ☐

☐ ☐

☐ ☐

■ ■ Énoncé des exercices

■ Warm up

Exercice 9.1 : Un sac contient quatre papiers bleus numérotés 1, 2, 4, 6 et six papiers verts numérotés 3, 5, 7, 8, 9, 10. Les papiers sont indiscernables au toucher. L'expérience consiste à tirer au hasard un papier dans le sac et à relever son numéro.

- Nous n'avons pas d'information a priori sur le tirage.
 - Quel est l'univers de l'expérience ? Combien compte-t-il d'issues possibles ?
 - Combien de cas réalisent l'événement A : « le numéro tiré est pair ».
 - Quelle est la probabilité que le numéro tiré soit pair ?
- Nous savons que le papier tiré est bleu.
 - Dans ce cas combien y a-t-il d'issues possibles ? de cas favorables à l'événement A ?
 - Que devient alors la probabilité de l'événement A ?
 - De quel type est la probabilité calculée ?
 - Appliquer la formule du cours pour retrouver le résultat précédent.

Exercice 9.2 : Passe ton Bac avec les probas

Le jeu vidéo *Passe ton Bac avec les probas*, offre une aide pour vaincre le niveau 1 à tous les coups. 75% des joueurs passent le premier niveau du jeu sans aide mais seulement 20% d'entre eux passent le second niveau. Ceux qui ont passé le premier niveau avec de l'aide réussissent le 2^e niveau dans 2% des cas.

On interroge un joueur au hasard.

- N_1 est l'événement « le joueur passe le premier niveau sans aide ».
- N_2 est l'événement « le joueur passe le deuxième niveau ».

- Déterminer $P(N_1)$, $P_{N_1}(N_2)$ et $P_{\bar{N}_1}(N_2)$.
- Construire un arbre pondéré représentant la situation.
- Calculer la probabilité $P(N_2)$.
- Nous savons que le joueur a passé le niveau 2. Quelle est la probabilité qu'il ait passé le niveau 1 sans aide ?

Exercice 9.3 : À l'école, Martin aime bien le tricycle. Il en fait durant deux récréations sur trois. Quand Martin fait du tricycle, quatre fois sur cinq Vincent en fait aussi mais si Martin n'en fait pas, alors une fois sur cinq Vincent n'en fait pas non plus. Les événements M : « Martin fait du tricycle » et V : « Vincent fait du tricycle » sont-ils indépendants ?

Exercice 9.4 : Elsa et Chloé

Chloé et Elsa sont deux sœurs qui n'aiment pas s'influencer. Cependant lorsque Chloé s'habille en noir, 6 fois sur 10 Elsa s'habille en noir aussi sinon en bleu. Et si Chloé s'habille en bleu, 2 fois sur 10, Elsa s'habille aussi en bleu sinon en noir. Mais quand Chloé s'habille en orange, Elsa s'habille en jaune.

Le lundi et le jeudi, Chloé s'habille en orange ; le mercredi et le vendredi, elle s'habille en noir et le reste de la semaine en bleu.

Nous appellerons B_C l'événement « Chloé s'habille en bleu », N_C l'événement « Chloé s'habille en noir », O_C l'événement « Chloé s'habille en orange », B_E l'événement « Elsa s'habille en bleu », N_E l'événement « Elsa s'habille en noir » et J_E l'événement « Elsa s'habille en jaune ».

1. Construire un arbre de probabilités représentant cette situation limpide.
2. Les événements O_C et J_E sont-ils indépendants?
3. Les événements O_C et B_E sont-ils indépendants?
4. Les événements B_C et B_E sont-ils indépendants?

■ Conditionnement

Exercice 9.5 : Chiens, chat et puce

Dans une pièce sont enfermés deux chiens, un chat et une puce. La puce change d'animal à chaque saut et le choisit au hasard. Sachant qu'au début de l'expérience la puce ne se trouve pas sur un animal, quelle probabilité a-t-on de voir la puce sur le chat au bout de 2 sauts?

Exercice 9.6 : De l'aluminium dans la peinture

Une peinture métallisée est une peinture qui contient des particules d'aluminium, ce qui donne un éclat particulier. En Europe, 42 % des voitures sont grises et 62% des teintes grises sont métallisées. 54 % des autres teintes ne sont pas métallisées.

On tire au hasard le numéro d'une plaque d'immatriculation européenne.

1. Quelle est la probabilité que la voiture correspondante soit de couleur métallisée sachant qu'elle est grise?
2. Déterminer la probabilité que la voiture correspondante soit de couleur gris métallisé?
3. Calculer la probabilité que la voiture correspondante soit d'une couleur métallisée?
4. Calculer la probabilité que la voiture correspondante soit de couleur grise sachant qu'elle est métallisée?

Exercice 9.7 : La règle R & B

À la maternité, les petites filles portent des chaussons roses et les petits garçons des chaussons bleus. C'est la règle R & B. Une étude statistique a montré que seulement 50% des filles portaient effectivement des chaussons roses et 35% des garçons des chaussons bleus. Le sexe-ratio¹, en France, en 2015 est de 1,045. On choisit au hasard un bébé dans une maternité française. Déterminer la probabilité que la règle R & B soit respectée sur cet enfant.

Exercice 9.8 : Les ami(e)s de mes ami(e)s

Sur un réseau social, Louise et Marie sont de grandes amies. Mais les nouvelles technologies sont parfois difficiles à assimiler. Pour devenir ami(e) avec Louise, les deux tiers des postulant(e)s ont demandé directement à Louise qui a accepté 3 propositions sur 5. Les autres ont demandé à Marie d'intercéder auprès de Louise qui ne reçoit de la part de Marie que 4 messages sur 5. Certains messages se perdent en effet dans le labyrinthe de l'Internet. Mais quand elle les reçoit, Louise accepte les propositions de Marie 9 fois sur 10. On choisit au hasard l'un(e) des prétendant(e)s à l'amitié de Louise.

Nous appellerons L l'événement « Louise est sollicitée », M l'événement « Marie est sollicitée » et A l'événement « le, la candidat(e) est accepté(e) comme ami(e) de Louise ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer les probabilités suivantes : $P(M)$, $P_M(A)$ et $P(L)$.
3. Avons-nous plus de chances de devenir ami(e) avec Louise en passant par l'entremise de Marie?
4. On choisit au hasard un(e) ami(e) de Louise. Quelle est la probabilité qu'il ou elle ait demandé à Marie d'intercéder pour lui ou elle?

Exercice 9.9 : Robusta ou Arabica

Il existe deux grandes variétés de café, le Robusta et l'Arabica. La production d'autres espèces est marginale. En 2010, la production mondiale de café s'élevait à 126,2 millions de sacs. Le sac est l'unité traditionnellement utilisée dans l'industrie du café, il s'agit d'un sac de 60 kg de café vert. Le plus gros producteur mondial, l'Amérique latine, produit 74,6 millions de sacs dont 63,3 Arabica tandis que l'Asie en produit 37,7. L'Afrique produit 6,7 millions de sacs de Robusta. Et la production mondiale d'Arabica est de 75,4 millions de sacs.

Source : International Trade Center.

On prélève au hasard un grain de café dans le monde. On appelle A , l'événement « le grain est de l'espèce Arabica », R , l'événement « le grain est de l'espèce Robusta », A_m , l'événement « le grain est d'origine sud-américaine », A_s , l'événement « le grain est d'origine asiatique » et A_f , l'événement « le grain est d'origine africaine ».

1. Dresser un tableau représentant la répartition de la production de café par zone géographique et par espèce cultivée.
2. Déterminer les probabilités des événements suivants : $P(A)$, $P(A_s)$ et $P(A_m \cap A)$.
3. Calculer $P_A(A_m)$ et $P_{A_f}(A)$.

Nb : on donnera les résultats à 10^{-3} près.

■ Indépendance

Exercice 9.10 : Trois robots pour un téléphone

Dans une usine, trois robots R_1 , R_2 et R_3 fabriquent des écrans de téléphone. Les contacts en bord d'écran sont assez délicats et sont contrôlés en fin de chaîne. Lorsqu'un défaut apparaît sur les contacts, l'écran est détruit. Le robot R_1 produit 20 % des écrans de la production avec 1 % de défauts sur les contacts. Le robot R_2 produit 55 % des écrans avec 4 % de défauts et enfin le robot R_3 produit des écrans avec 3,2 % de défauts. On prélève dans la production un écran au hasard. On pose R_i , l'événement « l'écran est fabriqué par le robot i » et D « l'écran a un défaut ».

1. Déterminer la probabilité qu'un écran soit fabriqué par le robot R_3 .
2. Calculer la probabilité qu'un écran ait un défaut sur les contacts. On pourra faire un arbre pondéré pour représenter la situation.
3. R_3 et D sont-ils des événements indépendants?
4. $R_1 \cup R_2$ et D sont-ils des événements indépendants?
5. R_1 et D sont-ils des événements indépendants? R_2 et D ?

Exercice 9.11 : A et B sont deux événements non négligeables issus du même univers d'une expérience aléatoire donnée.

1. Calculer $P(B)$ dans les différents cas suivants.
 - a. On donne $P(A) = 0,3$, $P(A \cup B) = 0,64$ et $P(A \cap B) = 0,1$.
 - b. A et B sont incompatibles. On donne $P(A \cup B) = 0,51$ et $P(A) = 0,26$.
 - c. A et B sont indépendants. On donne $P(A \cap B) = 0,247$ et $P(A) = 0,38$.
 - d. A et B sont indépendants. On donne $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,066$ et $P(A) = 0,67$.
2. Si A et B sont incompatibles, sont-ils indépendants? Justifier.

1. Le sexe-ratio est le rapport du nombre de mâles sur le nombre de femelles d'une même génération, au sein d'une espèce à reproduction sexuée.

■ Exercices posés au baccalauréat

Exercice 9.12 : Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie A

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges. Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
3. Soit l'événement C « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ». Démontrer que la probabilité de l'événement C est égale à $\frac{7}{18}$.
4. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
5. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie B

On dispose d'un second dé cubique B équilibré, présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1.
 - a. Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.
 - b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

D'après Bac, La Réunion, juin 2010

Exercice 9.13 : Archéologie préventive

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'événement : « le n -ième sondage est positif » est noté V_n , on note p_n la probabilité de l'événement V_n .

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

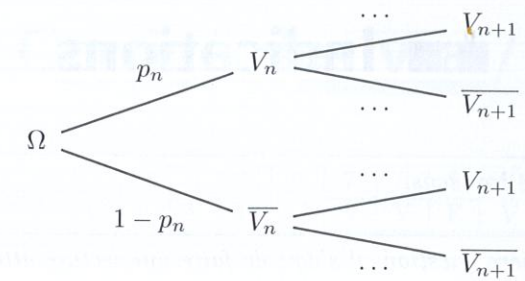
1. Calculer les probabilités des événements suivants :

- a. A : « les 2^e et 3^e sondages sont positifs » ;
- b. B : « les 2^e et 3^e sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^e sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
 - a. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
 - b. Exprimer p_n en fonction de n .
 - c. Conjecturer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n .

D'après Bac, Asie, 2010