

Séquence VII – Optimisation linéaire

Exercice VII.1

On considère deux produits A et B de prix respectifs p et p' . On suppose que :

La quantité de produit A demandée est : $146 - 2p + 3p'$

Celle de produit B demandée est : $300 - 5p - 7p'$

La quantité de produit A offerte est : $100 + 14p + p'$

Celle de produit B offerte est : $24 + 3p + 12p'$

On suppose que le marché est à l'équilibre dans un régime de libre concurrence.

Calculer p et p' (calcul manuel puis éventuellement avec la calculatrice).

Exercice VII.2

Cet exercice est basé sur le *modèle de statistique ouvert* de Leontif¹ : un complexe industriel comprend une centrale électrique et une raffinerie de pétrole. Les deux usines utilisent les produits de chacune d'elles pour leur propre production. Elles produisent donc chacune pour elles-mêmes et pour le marché. Pour simplifier, on évalue les échanges entre les deux usines en unité monétaire, ici en euros. Pour produire 1 € d'électricité, la centrale électrique utilise 0,55 € de fuel et 0,10 € d'électricité. Pour produire 1 € de fuel, la raffinerie utilise 0,20 € d'électricité et 0,05 € de fuel.

On veut déterminer les productions x d'électricité et y de fuel (en €) nécessaires, afin que le complexe industriel puisse livrer au marché : 600 000 € d'électricité et 250 000 € de fuel.

1. Montrer que l'énoncé se traduit par le système :

$$\begin{cases} 0,9x - 0,2y = 600\,000 \\ -0,55x + 0,95y = 250\,000 \end{cases}$$

2. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice.

Exercice VII.3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où a, b, c, d sont des réels et on appelle (C) sa courbe représentative dans un repère $(O; I, J)$. On sait que la courbe (C) :

- est tangente à la droite d'équation $y = -1$ au point A d'abscisse 0.
- admet au point B d'abscisse $\frac{2}{3}$ une tangente horizontale.
- admet au point C d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation : $y = x + 3$.

Déterminer les réels a, b, c, d .

Exercice VII.4

Dans cet exercice, les systèmes posés pourront tous être résolus à l'aide de la calculatrice.

Une usine fabrique chaque jour trois alliages à base de fer, de plomb et de cuivre.

L'alliage A est constitué de 30% de fer, de 30% de plomb et de 40% de cuivre.

L'alliage B est constitué de 10% de fer, 50% de plomb et 40% de cuivre.

L'alliage C est constitué de 50% de fer, 25% de plomb et 25% de cuivre.

1. L'usine dispose de 37 kg de fer, de 35 kg de plomb et de 38 kg de cuivre.

Quelle quantité de chacun des alliages doit-elle produire afin d'épuiser son stock de matières premières ?

2. Une autre fois, on livre à l'usine 14 kg de fer et 13 kg de plomb. Elle doit produire 10 kg de l'alliage A : quelle quantité de cuivre doit-on lui livrer, afin d'épuiser son stock de matières premières ?

3. Une autre fois, on livre à l'usine 25 kg de fer. Sachant qu'elle doit produire deux fois plus d'alliage B que d'alliage A et deux fois plus d'alliage C que d'alliage B, combien doit-on lui livrer de plomb et de cuivre, afin d'épuiser son stock de matières premières ?

Exercice VII.5

Teil A

Seien a, b und c drei reelle Zahlen.

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = (ax + b)e^{cx}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K .

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c des Funktionsterms $f(x)$, so dass gilt :

- $f(0) = 10$
- $f(5) = 0$
- K besitzt an der Stelle $x = 6$ eine waagerechte Tangente.

Teil B

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = (-2x + 10)e^{-x} \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

- Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ und begründen Sie Ihre Ergebnisse.
- Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und erstellen Sie eine Monotonietabelle.
- Untersuchen Sie, ob die Kurve von f eine Wendestelle besitzt.

1. économiste américano-soviétique (1906-1999).

Exercice VII.6

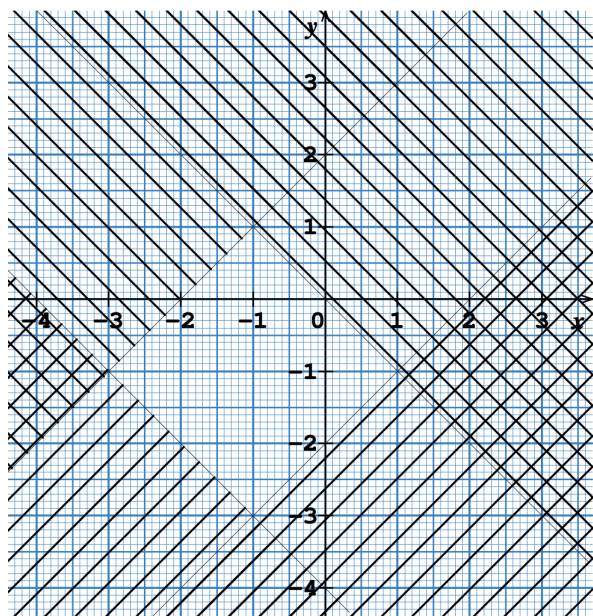
Pour chacune des deux questions, représenter graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation ou du système puis en donner trois solutions.

a) $2x + 3y \geq 5$.

b)
$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x - 3y + 5 \leq 0 \\ x + y - 6 > 0 \end{cases}$$

Exercice VII.7

Sans justification, caractériser par un système d'inéquations l'appartenance du point $M(x; y)$ à la partie du plan non hachurée.



Exercice VII.8

Le tableau suivant donne l'audience approximative, selon la tranche d'âge des lecteurs, de deux hebdomadaires d'information dans un département.

Tranche d'âge	Gazette des Yvelines	Versailles Hebdo
20 – 29 ans	40 000	0
30 – 39 ans	20 000	20 000
40 – 59 ans	20 000	40 000
60 ans et plus	0	20 000

Une chaîne de magasins implantée dans ce département souhaite faire paraître une publicité dans ces deux journaux avec un objectif global minimal d'audience défini ci-dessous.

Tranche d'âge	Audience minimale souhaitée
20 – 29 ans	120 000
30 – 39 ans	220 000
40 – 59 ans	340 000
60 ans et plus	100 000

Suite de l'exercice VII.8

On note x le nombre de parutions de cette publicité dans la Gazette des Yvelines et y le nombre de parutions dans Versailles Hebdo. Un même lecteur peut être compté plusieurs fois, l'essentiel étant qu'il soit exposé à la publicité.

1. Prouver que les couples $(x; y)$ solutions du problème sont les solutions du système

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ x \geq 3 \\ y \geq 5 \\ y \geq -x + 11 \\ y \geq -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \end{cases}$$

2. L'objectif d'audience de la publicité est-il atteint avec 4 parutions dans la Gazette et 7 parutions dans l'Hebdo ? Avec 6 parutions dans la Gazette et 5 parutions dans l'Hebdo ? Avec 3 parutions dans la Gazette et 9 parutions dans l'Hebdo ?
3. Représenter le polygone des contraintes associé au problème.
4. Donner trois programmes de parution possibles.
5. Chaque parution dans la Gazette coûte 20 000 € et chaque parution dans l'Hebdo coûte 30 000 €. On note f la fonction objectif qui à un couple $(x; y)$, c'est-à-dire à un programme de parution, associe le budget associé. Que vaut $f(x; y)$?
6. Indiquer sur le graphique les points de coordonnées $(x; y)$ tels que

$$f(x; y) = 380\,000$$

L'objectif d'audience peut-il être atteint avec un budget de 380 000 € ? Si oui, donner un programme de parution correspondant à ce budget.

7. Où sont situés les points de coordonnées $(x; y)$ associés à un budget de k euros ?

En déduire par une méthode graphique le budget minimal permettant l'objectif de parution et donner le programme de parution associé.

Exercice VII.9

Dans un lycée, un groupe d'élèves se charge de la vente de pain au chocolat et de croissants lors de la récréation du matin. Pour pouvoir satisfaire la demande, ils doivent disposer au minimum de 108 pains au chocolat et de 96 croissants. Deux boulangers proposent pour le même prix :

- l'un, le lot A comprenant 12 pains au chocolat et 8 croissants
- l'autre, le lot B composé de 9 pains au chocolat et de 12 croissants.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de lots A et le nombre de lots B qui doivent être achetés pour satisfaire la demande au moindre coût. Dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), on associe à l'achat de x lots A et de y lots B le point de coordonnées $(x; y)$.

1. Placer sur le graphique :

- le point E correspondant à l'achat de 13 lots A et de 14 lots B.
- le point F correspondant à l'achat de 10 lots A et de 1 lots B.

Les achats associés aux points E et F permettent-ils de satisfaire la demande ?

2. On s'intéresse maintenant à la satisfaction de la demande.

- (a) Montrer que, pour que l'achat correspondant au point de coordonnées $(x; y)$ permette de satisfaire la demande, les nombres x et y doivent vérifier les inégalités $4x + 3y \geq 36$ et $2x + 3y \geq 24$.
- (b) Colorier ou hachurer la région du plan dans laquelle se trouvent les points dont les coordonnées ne sont pas solutions.

3. On cherche à minimiser le coût, c'est-à-dire le nombre total $x + y$ de lots achetés.

- (a) Les points associés à des achats d'un nombre total de n lots sont situés sur la droite Δ_n d'équation $x + y = n$. Tracer les droites Δ_9 et Δ_{11} . D'après le graphique, peut-on satisfaire la demande en achetant au total seulement 9 lots ? En achetant 11 lots ?
- (b) En utilisant le graphique, déterminer l'achat qui permet de satisfaire la demande au moindre coût.

Exercice VII.10

Une commune désire aménager un nouvel espace vert. Une société de vente lui propose des lots X comprenant dix rosiers, un magnolia et un camélia pour un montant de 200 €, ou des lots Y comprenant cinq rosiers, un magnolia et trois camélias pour un montant de 300 €. Les besoins sont d'au moins 100 rosiers, 16 magnolias et 30 camélias.

On désigne par x le nombre de lots X et par y le nombre de lots Y achetés.

1. Expliquer pourquoi $(x; y)$ satisfait

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2x + y \geq 20 \\ x + y \geq 16 \\ x + 3y \geq 30 \end{cases}$$

2. On considère les droites $\mathcal{R}, \mathcal{M}, \mathcal{C}$ d'équations

- $\mathcal{R} : 2x + y = 20$
- $\mathcal{M} : x + y = 16$
- $\mathcal{C} : x + 3y = 30$

- (a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{M}$.
- (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection B de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{C}$.
- (c) Tracer les droites $\mathcal{R}, \mathcal{M}$ et $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm (utiliser du papier millimétré)
- (d) En justifiant, représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M(x; y)$

3. La commune peut-elle satisfaire ses besoins par l'achat de 2 lots X et 15 lots Y ? Par l'achat de 3 lots X et 14 lots Y ? Justifier les réponses par un calcul.

4. On note d la dépense totale en euros pour l'achat de x lots X et y lots Y .

- (a) Exprimer la dépense d en fonction de x et y . En déduire que le point de coordonnées $(x; y)$ est sur la droite Δ_d d'équation

$$\Delta_d : y = -\frac{2}{3}x + \frac{d}{300}$$

- (b) Tracer Δ_{3000} correspondant à une dépense $d = 3000$ euros. La commune peut-elle satisfaire ses besoins à ce prix ? (Justifier).
- (c) Tracer Δ_{4200} . Graphiquement, déterminer les couples (x, y) qui permettent de satisfaire les besoins pour une dépense $d = 4200$ euros.

5. Expliquer comment obtenir à l'aide du graphique le couple (x, y) qui permet de satisfaire les besoins au coût le plus faible. Quel est ce couple ? Calculer la dépense minimale.

Exercice VII.11

Une société fabrique des épinglettes de deux types, A ou B. Ces épinglettes sont vendues par lots de 100, chaque lot ne comportant qu'un type d'épinglette. Voici les données concernant la fabrication d'un lot d'épinglette de chaque type :

	Type A	Type B
Matières premières	500 g	500 g
Main d'œuvre	45 min	1 h
Séchage	15 min	30 min

Les capacités annuelles de production ne permettent pas à cette société de d'employer plus de 4 tonnes de matières premières, de consacrer plus de 2000 heures au séchage, et plus de 5000 heures à la main d'œuvre.

La demande d'épinglettes est telle que la société ne peut pas espérer vendre annuellement plus de 5000 lots de type A et 3000 lots de type B.

Enfin, l'ensemble de sa production annuelle d'épinglettes ne peut être inférieur à 2000 lots, tous types confondus. On note x le nombre de lots de type A et y le nombre de lots de type B que produit annuellement la société.

- Montrer que le système des contraintes vérifié par un couple $(x; y)$ est le système ci-contre.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 0 \leq x \leq 5000 \\ 0 \leq y \leq 3000 \\ y \geq 2000 - x \\ y \leq -x + 8000 \\ y \leq -\frac{3}{4}x + 5000 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 4000 \end{array} \right.$$
- Représenter le polygone des contraintes associé à ce système : vérifier que ce polygone est un heptagone.
- D'après le graphique, la société peut-elle produire :
 - 2000 lots de type A et 2500 de type B ?
 - 4500 lots de type A et 2000 de type B ?
 - 1000 lots de type A et 500 de type B ?
- La société réalise un bénéfice de 300 € sur chaque lot du type A et de 200 € sur chaque lot du type B vendus.
 - La société peut-elle réaliser un bénéfice de 600 000 € ?
 - Déterminer le bénéfice maximal que peut réaliser la société et le programme de production correspondant.

Exercice VII.12

Le gérant d'un hôtel souhaite renouveler le linge de toilette de son établissement. Il a besoin de 90 draps de bain, 240 serviettes et 240 gants de toilettes.

Une première entreprise lui propose un lot A contenant 2 draps de bains, 4 serviettes et 8 gants de toilette pour 200 €. Une seconde entreprise lui propose un lot B comprenant 3 draps de bain, 12 serviettes et 6 gants de toilette pour 400 €. Pour répondre à ses besoins, le gérant achète x lots A et y lots B.

- Traduire les contraintes par un système d'inéquations.
- Dans un repère orthonormé (avec pour unité 2 cm pour 5 lots sur chaque axe) représenter l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ du plan tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq -\frac{2}{3}x + 30 \\ y \geq -\frac{1}{3}x + 20 \\ y \geq -\frac{4}{3}x + 40 \end{array} \right.$$

- Est-il possible de réaliser les achats nécessaires pour 5 000 € ?
- Déterminer graphiquement, en expliquant la méthode, le nombre de lots A et de lots B à acheter afin que la dépense soit minimale.

Exercise VII.13

In einer Fabrik werden zwei verschiedene Sorten von Kabeln hergestellt und für 150 € (Typ A) bzw. 100 € (Typ B) pro 100 m verkauft. Für Kabel des Typ A benötigt man 16 kg Plastik und 4 kg Kupfer. Für Kabel des Typ B benötigt man 6 kg Plastik und 12 kg Kupfer. Die produzierte Menge von B darf nicht größer sein als die doppelte Menge von A. Außerdem beträgt der Materialvorrat derzeit nur 252 kg Plastik und 168 kg Kupfer. Wählen Sie im Folgenden die Variablen x für die Plastikmenge und y für die Kupfermenge.

1. Stellen Sie die Bedingungen mit Hilfe von Ungleichungen dar.
2. Zeichnen Sie das Planungsvieleck.
3. Stellen Sie die Zielfunktion auf.
4. Ermitteln Sie graphisch des Punktepaares $(x | y)$, für das der Umsatz maximal wird.
(Andere Formulierung der Frage : Welche Mengen der beiden Kabelsorten maximieren den Umsatz unter Einhaltung der Nebenbedingungen der Firma ?)

Exercise VII.14

Eine Fluggesellschaft möchte eine Flugverbindung zwischen zwei Städten einrichten. Ziel ist es, in einem bestimmten Zeitraum, 1600 Personen und 96 Tonnen Ladung zu transportieren. Derzeit sind zwei Flugzeuge Typen verfügbar : 11 Flugzeuge des Typs A und 8 Flugzeuge des Typs B. Typ A kostet pro Flug 4000 € und kann 200 Personen sowie 6 Tonnen Ladung transportieren. Typ B kostet pro Flug 1000 € und kann 100 Personen und 15 Tonnen Ladung transportieren. Weiter soll x für die Anzahl an Personen und y für die Ladungsmenge stehen.

1. Stellen Sie die Bedingungen mit Hilfe von Ungleichungen dar und zeichnen Sie das Planungsvieleck.
2. Wie viele Flugzeuge von jedem Typen wird die Fluggesellschaft unter Einhaltung der Nebenbedingungen einsetzen, um ihre Kosten zu minimieren ?

Exercise VII.15

Ein Spielwarenfabrik stellt Dreiräder (D), Roller (R) und Fahrräder (F) her. Der Reingewinn beträgt 10 € für D, 15 € für R und 40 € für F (immer pro Stück).

Infolge der Nachfrage und der Produktionsbedingungen sind folgende Einschränkungen zu beachten :

- In einem Monat werden insgesamt 800 Stück hergestellt.
- Monatlich sind mindestens 200 D und 200 R zu produzieren.
- Es dürfen monatlich höchstens 400D und 500R hergestellt werden, zusammen aber nicht weniger als 500.

1. Stelle die Bedingungen mit Hilfe von Ungleichungen dar und zeichne das Planungsvieleck.
2. Bestimme den größten Gewinn.

Exercise VII.16

An einer Schießbude kann man mit Bällen auf drei verschiedene Ziele werfen. Ein Wurf kostet 1,50 €. Urs hat lange geübt ; er weiß nun, dass er das erste Ziel mit 9 von 10 Bällen trifft, das zweite Ziel mit 7 von 10 und das dritte Ziel nur mit 4 von 10 Bällen. Pro Treffer erhält er beim 1. Ziel 2 €, beim 2. Ziel 3 € und beim 3. Ziel 4 €. Urs wirft 100 Bälle, mindestens 10 auf jedes Ziel.

Berechne den maximalen und den minimalen Gewinn, den Urs unter diesen Voraussetzungen gewinnen kann.

Exercise VII.17

Die Bodenfläche eines Schulhauses beträgt 8000 m² und soll mit zwei Sorten Belag ausgestattet werden. Die erste Sorte kostet 20 € / m², die zweite Sorte 30 € / m².

Die Reinigungskosten pro Jahr sind bei der zweiten Sorte nur halb so groß, wie bei der ersten Sorte, bei der sie 3 € / m² ausmachen.

Wie ist die Auswahl zu treffen, wenn 180000 € bis 210000 € für die Gesamtkosten eingeplant sind, und die Reinigungskosten möglichst klein gehalten werden sollen ?



Exercise VII.18

Ein Unternehmen benötigt wöchentlich mindestens 2000 Liter(L) Putzmittel A und 2250 L Putzmittel B. Bei einem Großhändler erhält man Packungen, die 20 L A und 50 L B enthalten.

Bei einem zweiten Großhändler bestehen die Packungen aus 40 L A und 15 L B.

In beiden Fällen kostet A $60\text{£}/L$ und B $40\text{£}/L$.

Weiter soll x für die Menge an Putzmittel A und y für die Menge an Putzmittel B stehen.

Wie viele Packungen müssen wöchentlich bei jedem

Händler eingekauft werden, wenn sich möglichst geringe Kosten ergeben sollen?

Exercise VII.19 Bac ES

Einer Großgärtnerei stehen zur Bepflanzung mit Nelken und Tulpen eine Fläche von 120 m^2 zur Verfügung. Um eine Mengeneinheit ($1 \text{ ME} = 1000$ Stück) Nelken zu pflanzen, werden 3 m^2 und um 1 ME Tulpen zu pflanzen, werden 2 m^2 benötigt. Es sollen maximal 900€ für die Bepflanzung eingesetzt werden, wobei der Anbau von 1 ME Nelken 15 € und von 1 ME Tulpen 30€ kostet. Die Tulpen müssen zusätzlich mit einem Spezialdünger behandelt werden, wobei für 1 ME 2 Liter verbraucht werden. Wegen der Umweltbestimmungen dürfen aber höchstens 40 Liter eingesetzt werden.

Nelken liefern 40 € und Tulpen 60 € pro Mengeneinheit.

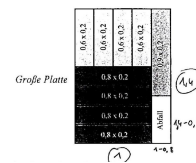
Die Gärtnerei pflanzt x ME Nelken und y ME Tulpen.

- Drücken Sie die einschränkenden Bedingungen für die Variablen x und y durch ein lineares Ungleichungssystem aus.
- Veranschaulichen Sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems in einem kartesischen Koordinatensystem durch ein Planungsvieleck. (Einheiten auf den Koordinatenachsen : 2 cm pro 10 ME)
- Stellen Sie den Term der Zielfunktion auf, welche den Gewinn der Gärtnerei in Abhängigkeit von x und y angibt.
 - Kann die Gärtnerei beim Verkauf ihrer Blumen einen Gewinn von 1200 € erzielen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Wie viele Nelken und Tulpen muss die Gärtnerei anpflanzen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen? Erklären Sie, wie Sie graphisch verfahren.
 - Wie hoch ist dieser maximaler Gewinn?

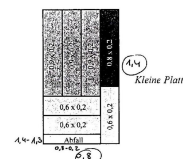
Exercise VII.20 Bac ES 2010

In einer Möbelfabrik sollen Holzplatten zu Brettern zersägt werden. Die großen Platten werden nach Plan I und die kleinen Platten nach Plan II zersägt. Bitte beachten Sie den Unterschied zwischen Brettern und Platten. (Die Maße in der Zeichnung sind in Meter angegeben).

Plan I



Plan II



Für den Auftrag einer Sctiule werden von den 0,8 m langen Brettern mindestens 1200 Stück, von den 0,6 m langen Brettern mindestens 2400 Stück und von den 0,9 m langen Brettern mindestens 1050 Stück benötigt.

Im Lager können maximal 1200 große Platten und maximal 1500 kleine Platten gelagert werden.

- Wie viele 0,8 m lange Bretter erhält man, wenn man 5 Platten nach Plan I und 3 Platten nach Plan II zersägt?
- Wie viel m^2 Abfall entsteht, wenn man 2 Platten nach Plan I und 4 Platten nach Plan II zersägt?
- Stellen Sie die Nebenbedingungen für dieses Optimierungsproblem auf. Teilergebnis :

$$\begin{cases} y \geq -\frac{4}{3}x + 800 \\ y \geq -4x + 1200 \\ y \geq -\frac{1}{3}x + 350 \end{cases}$$
mit x : Anzahl der großen Platten und y : Anzahl der kleinen Platten
- Zeichnen Sie das Planungsvieleck ein. (Längeneinheit : 100 Platten = 1 cm)
- Wie viele große und kleine Platten benötigt man, wenn der Abfall möglichst klein sein soll? Stellen Sie zunächst die Zielfunktion auf.

Wie viel m^2 Abfall erhält man in diesem Fall?

- Die Möbelfabrik erhält einen weiteren Auftrag, bei dem 1000 Stück von den 0,9 m langen Brettern benötigt werden. Kann sie ihn mit den Resten aus Aufgabe 5) erfüllen, ohne weitere Platten zu zersägen?



Exercise VII.21 Bac ES 2014

Ein Landwirt möchte ein Körnerfutter für Legehühner aus Weizen und Gerste anbauen und vermarkten. Für den Anbau der beiden Getreidesorten steht ihm insgesamt eine Fläche von 30 ha zur Verfügung. Aus Rücksichtnahme auf die Fruchtfolge kann der Bauer maximal 70% seiner Fläche mit Weizen bepflanzen. Beide Getreidesorten erhalten unterschiedliche Mengen an Kunstdünger. Außerdem muss der Weizen 8 fter in kleineren Mengen gedüngt werden. Dies führt dazu, dass auch der zeitliche Arbeitsaufwand unterschiedlich ist. Weizen erfordert einen Arbeitsaufwand von 4 h/ha, Gerste 2,5 h/ha. Zur

Verfügung stehen insgesamt 100 ha .

Für die Bestimmung der Kosten- und Erlösbeträge gelten folgende Angaben :

	Weizen	Gerste
Düngereinsatz	100 kg/ha	50 kg/ha
Kosten des Düngers	400€/t	400t/t
Ernteertrag	7 tha	5,5ha
Erzielbarer Verkaufspreis	200e/t	180t/t

Wählen Sie im Folgenden die Variablen x für die Hektaranzahl des Weizens und y für die Hektaranzahl der Gerste.

1. Ist es für den Landwirt unter den gegebenen Bedingungen möglich, 21 ha Weizen und 9 ha Gerste anzubauen ?
2. Drücken Sie die einschränkenden Bedingungen für die Variablen x und y durch ein lineares Ungleichungssystem aus.
3. Zeichnen Sie die Lösungsmenge des linearen Ungleichungssystems als Planungsvieleck in ein Koordinatensystem ein (Vorgabe : 1 cm entspricht 2 ha).
4. Berechnen Sie den Gewinn, den der Landwirt nur mit 1 ha Weizen erwirtschaftet.
5. Stellen Sie die Zielfunktion auf, die den Gewinn in Abhängigkeit von x und y angibt.
6. Zeichnen Sie den Graph der Zielfunktion, welche einen Gewinn von 24250£ abwirft, in das Koordinatensystem ein.
7. a) Ermitteln Sie graphisch den Punkt für den maximalen Gewinn.
b) Berechnen Sie die exakten Koordinaten des Punktes.
c) Geben Sie den maximalen Gewinnbetrag und die zugehörige Flächenverteilung an.
8. Der Landwirt hat die Möglichkeit, eine Fläche von 10 ha dazu zu pachten. Dies kostet eine jährliche Pacht von 1200£ pro ha. Würde er mit der Pacht den Gewinn steigern, wenn er auch den Arbeitseinsatz im gleichen Maße steigern kann ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Exercice VII.22 Bac ES 2018

Ein Getränkehersteller möchte ein neues Mixgetränk aus Apfelsaft und Ananassaft herstellen. Es sollen davon täglich mindestens 800 Liter produziert werden.

Allerdings kann er von seinem Produzenten täglich höchstens 600 Liter Ananassaft beziehen.

Um ein Gütesiegel zu erhalten, darf das neue Getränk höchstens 120g Zucker pro Liter enthalten, muss aber mindestens 90 mg Vitamin C pro Liter aufweisen.

Man kennt die Werte für die einzelnen Säfte :

Apfelsaft	106 g Zucker pro Liter	74 mg Vitamin C pro Liter
Ananassaft	133 g Zucker pro Liter	116 mg Vitamin C pro Liter

Weiter soll x für die Menge an Apfelsaft in Litern stehen und y entsprechend für die Menge an Ananassaft.

1. Stellen Sie alle Bedingungen für x und y mit Hilfe von Ungleichungen dar, die man aus allen oben gegebenen Daten erhält.
2. Die Bedingungen aus Teil A. 1 führen auf die folgenden Ungleichungen :

$$x \geq 0; y \geq 0; \quad y \geq -x + 800; y \leq 600; y \leq \frac{14}{13}x; y \geq \frac{8}{1}x$$

Zeichnen Sie die zugehörigen Geraden in ein geeignetes Koordinatensystem und markieren Sie das Planungsvieleck.

3. Der Hersteller hat Kosten von 0,40£ für einen Liter Apfelsaft und von 0,60£ für einen Liter Ananassaft.
 - a. Stellen Sie die Zielfunktion auf. Kennzeichnen Sie alle Punkte im Koordinatensystem, die den täglichen Kosten von 540£ entsprechen
 - b. Ermitteln Sie graphisch einen Näherungswert für das Punktepaaar $(x | y)$, für das die Kosten minimal werden. Beschreiben Sie Ihr Lösungsverfahren.
 - c. Berechnen Sie den Zielpunkt auch als Schnitt zweier geeigneter Geraden. Runden Sie auf ganze Liter.
 - d. Berechnen Sie die zugehörigen Kosten für diesen Punkt
4. Aufgrund einer schlechten Apfel-Ernte ist der Preis für einen Liter Apfelsaft auf 0,60£ gestiegen. Der Preis für einen Liter Ananassaft bleibt bei 0,60£. Welche Möglichkeiten hat der Hersteller, um weiterhin kostenminimal zu produzieren ? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Im ersten Monat wird die ursprüngliche Menge von 800 Litern hergestellt. Geben Sie die explizite Darstellung einer Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ an, wobei das n -te Folgenglied die Produktion im n -ten Monat in Litern angibt.

Um welche Art von Folge handelt es sich bei (a_n) ?

2. Zeigen Sie das $a_2 = 816$ und berechnen Sie a_{24} .
3. In welchem Monat hat sich die Produktion erstmals mindestens verdoppelt?
4. Welche Gesamtmenge Mixsaft produziert der Hersteller in den ersten zwei Jahren insgesamt?

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1

Solution de l'exercice 2

Solution de l'exercice 3

Solution de l'exercice 5

Solution de l'exercice 6

Solution de l'exercice 7

Solution de l'exercice 8

Solution de l'exercice 9

Solution de l'exercice 10

Solution de l'exercice 11

Solution de l'exercice 12

Solution de l'exercice 13

Solution de l'exercice 14

Solution de l'exercice 15

Solution de l'exercice 16

Solution de l'exercice 17 Die Lösungsmenge
des linearen

Ungleichungssystems

$$16x + 6y \leq 252$$

$$4x + 12y \leq 168$$

$$y \leq 2x$$

ist in der Abbildung farblich hervorgehoben.

Optimale Lösung bestimmen :

a) Reschnerich

Da das Optimum einem Eckpunkt des Lösungsbereichs entspricht, lesen wir diese zunächst ab : $P_1(0 \mid 0)$, $P_2(6 \mid 12)$, $P_3(12 \mid 10)$, $P_4(15, 75 \mid 0)$.

Jetzt setzen wir die Punkte in die Zielfunktion ein und bestimmen das Maximum.

$$z(x; y) = 150x + 100y$$

$$z(0; 0) = 150 \cdot 0 + 100 \cdot 0 = 0\text{£}$$

$$z(6; 12) = 150 \cdot 6 + 100 \cdot 12 = 2.100\text{£}$$

$$z(12; 10) = 150 \cdot 12 + 100 \cdot 10 = 2.800\text{£} \rightarrow$$

Maximum!

$$z(15, 75; 0) = 150 \cdot 15, 75 + 100 \cdot 0 = 2.362, 50\text{£}$$

Die Fabrik maximiert ihren Umsatz unter Einhaltung der Nebenbedingungen, wenn sie 12 mal 100 m Kabel vom Typ A und 10 mal 100 m Kabel vom Typ B produziert.

b) Graphisch

Graphisch finden wir das Maximum, indem wir die Zielfunktion einzeichnen und anschließend solange parallel verschieben, bis die Gerade den letzten Eckpunkt des Lösungsbereichs berührt. Der letzte Eckpunkt entspricht dann der optimalen Lösung.

Wir lösen die Zielfunktion zunächst nach y auf

$$z(x, y) = 150x + 100y = 0$$

$$100y = -150x$$

$$y = -1,5x$$

um diese in das Koordinatensystem zu zeichnen. Danach verschieben wir die Gerade solange parallel, bis wir den letzten Eckpunkt des Lösungsbereichs erreichen.

Das Optimum (hier : Maximum) ist in der Abbildung durch einen roten Punkt

Abb. 8 G dargestellt.

Solution de l'exercice 18 Die Lösungsmenge
des linearen

Ungleichungssystems

$$16x + 6y \leq 252$$

$$4x + 12y \leq 168$$

$$y \leq 2x$$

ist in der Abbildung farblich hervorgehoben.

Optimale Lösung bestimmen :

a) Reschnerich

Da das Optimum einem Eckpunkt des Lösungsbereichs entspricht, lesen wir diese zunächst ab : $P_1(0 \mid 0)$, $P_2(6 \mid 12)$, $P_3(12 \mid 10)$, $P_4(15, 75 \mid 0)$.

Jetzt setzen wir die Punkte in die Zielfunktion ein und bestimmen das Maximum.

$$z(x; y) = 150x + 100y$$

$$z(0; 0) = 150 \cdot 0 + 100 \cdot 0 = 0\text{£}$$

$$z(6; 12) = 150 \cdot 6 + 100 \cdot 12 = 2.100\text{£}$$

$$z(12; 10) = 150 \cdot 12 + 100 \cdot 10 = 2.800\text{£} \rightarrow$$

Maximum!

$$z(15, 75; 0) = 150 \cdot 15, 75 + 100 \cdot 0 = 2.362, 50\text{£}$$

Die Fabrik maximiert ihren Umsatz unter Einhaltung der Nebenbedingungen, wenn sie 12 mal 100 m Kabel vom Typ A und 10 mal 100 m Kabel vom Typ B produziert.

b) Graphisch

Graphisch finden wir das Maximum, indem wir die Zielfunktion einzeichnen und anschließend solange parallel verschieben, bis die Gerade den letzten Eckpunkt des Lösungsbereichs berührt. Der letzte Eckpunkt entspricht dann der optimalen Lösung.

Wir lösen die Zielfunktion zunächst nach y auf

$$z(x, y) = 150x + 100y = 0$$

$$100y = -150x$$

$$y = -1,5x$$

um diese in das Koordinatensystem zu zeichnen. Danach verschieben wir die Gerade solange parallel, bis wir den letzten Eckpunkt des Lösungsbereichs erreichen.

Das Optimum (hier : Maximum) ist in der Abbildung durch einen roten Punkt

Abb. 8 G dargestellt.

