

Loi Binomiale : Exercices corrigés

55 À l'arrivée d'un train Paris-Toulon dont le départ a eu lieu à 7 h 07 du matin, on demande à 10 passagers tirés au hasard s'ils ont dormi ou non durant le voyage et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes ayant dormi parmi eux.

Pour un train partant à cette heure, on considère que la probabilité qu'un passager s'endorme est 0,68.

On considère par ailleurs que les endormissements des uns et des autres sont indépendants.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en donner les paramètres.

2. Calculer $p(X=8)$, $p(X=9)$ et $p(X=10)$.

3. Quelle est la probabilité que 8 personnes ou plus se soient endormies parmi les 10 ?

1. Chaque passager a la même probabilité 0,68 de dormir durant le trajet indépendamment des autres passagers. On répète donc 10 fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli avec $p(\text{Succès})=0,68$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,68$.

$$2. p(X=8) = \binom{10}{8} 0,68^8 (1-0,68)^2 \approx 0,211$$

$$p(X=9) = \binom{10}{9} 0,68^9 \cdot 0,32 \approx 0,099$$

$$p(X=10) = \binom{10}{10} 0,68^{10} 0,32^0 = 0,68^{10} \approx 0,021$$

$$3. p(X \geq 8) = p(X=8) + p(X=9) + p(X=10) \approx 0,331$$

58 On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n=27$ et $p=0,32$. Calculer :

a) $p(Y < 8)$.

b) $p(Y \geq 13)$.

c) $p(7 < Y < 14)$.

d) $p(9 < Y)$.

On utilise la calculatrice après avoir écrit la probabilité comme il faut :

$$a) p(Y < 8) = p(Y \leq 7) \approx 0,327$$

$$b) p(Y \geq 13) \approx 0,059$$

$$c) p(7 < Y < 14) = p(8 \leq Y \leq 13) \approx 0,648$$

$$d) p(9 < Y) = p(10 \leq Y) \approx 0,354$$

61 La probabilité de gagner à un jeu de grattage est de 0,1.

On considère 1 000 joueurs ayant joué à ce jeu dont on suppose que leurs résultats (« gagné » ou « perdu ») sont indépendants et on appelle G la variable aléatoire donnant le nombre de gagnants parmi ces 1 000 joueurs.

Déterminer la probabilité qu'il y ait :

a) plus de 100 gagnants ;

b) moins de 85 gagnants ;

c) entre 95 (inclus) et 105 (inclus) gagnants ;

d) entre 90 (exclu) et 110 (exclu) gagnants.

$$G \sim B(1000; 0.1)$$

$$a) p(G \geq 100) \approx 0,515$$

$$b) p(G \leq 85) \approx 0,061$$

$$c) p(95 \leq X \leq 105) \approx 0,438$$

$$d) p(90 < X < 110) = p(91 \leq X \leq 109) \approx 0,684$$

67 On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p inconnus et vérifiant $E(X) = 43,2$ et $V(X) = 27,648$.

1. Montrer que $1-p=0,64$.

2. En déduire p puis n .

$$\text{On a } E(X) = 43,2 = np$$

$$\text{et } V(X) = 27,648 = np(1-p)$$

$$\text{On en déduit que } \frac{V(X)}{E(X)} = \frac{np(1-p)}{np} = 1-p$$

$$\text{Donc } 1-p = \frac{27,648}{43,2} = 0,64$$

$$\text{On en déduit } p = 1 - 0,64 = 0,36$$

$$\text{Et } E(x) = np = 43,2 \Rightarrow n = \frac{43,2}{p} = \frac{43,2}{0,36} = 120$$

107 Une compagnie aérienne doit remplir un avion de 180 fauteuils.

Comme elle sait que le taux de défection habituel (on suppose que les défections sont



indépendantes les unes des autres) des personnes ayant acheté un billet est de 9 %, elle décide de mettre plus de 180 billets en vente.

1. Déterminer le nombre de billets à vendre pour être sûr au seuil de 95 % de ne pas vendre trop de billets (c'est-à-dire qu'il n'y aura pas plus de 180 personnes qui prendront finalement le vol).

2. Déterminer le nombre de billets à vendre pour qu'il y ait moins d'1 % de chance que trop de billets ait été vendus.

1. Soit X la v.a. qui compte le nombre de défections sur un avion de 180 places. Chaque passager a la même probabilité de défection et vient ou non indépendamment des autres passagers.

Donc $X \sim B(180; 0.09)$

D'après la calculatrice, l'intervalle de fluctuation au seuil de confiance de 95 % est [9 ; 24].

Cela signifie que le nombre de passagers absents sera compris entre 9 et 24 dans 95% des cas.

Donc, il y a 95 % de chances qu'on puisse vendre 9 billets supplémentaires sans dépasser la capacité de 180 fauteuils.

2. C'est la même chose mais en remplaçant 95% par 99%. Du coup on remplace les 2.5% de la méthode par 0.5%. On trouve [7 ; 27]. Dans ce cas, on ne vend que 7 billets supplémentaires.

63 En France, la proportion de personnes utilisant un fauteuil roulant est estimée à environ 2 %.

On suppose que la population française est suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.

Dans un train, dont les 1 250 places ont été réservées, il est prévu 30 places pouvant accueillir les personnes en fauteuil roulant.

Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas assez de places pour les personnes en fauteuil roulant ?

Soit X la v.a. qui compte le nombre de passagers en fauteuil roulant. On a $X \sim B(1250; 0.02)$.

D'après la calculatrice :

$$p(X > 30) = p(X \geq 31) \approx 0.134$$

Il y a environ 13,4% de chance qu'il n'y ait pas assez de places pour les personnes en fauteuil roulant.

87 On considère une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n inconnu et $p = 0,89$.

1. Déterminer la plus grande valeur de n pour laquelle $p(Z = n) > 0,01$.

2. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $p(Z < n) > 0,75$.

On a $Z \sim B(n; 0.89)$

$$\begin{aligned} 1. \quad p(Z = n) > 0.01 &\Leftrightarrow 0.89^n > 0.01 \\ &\Leftrightarrow \ln(0.89^n) > \ln(0.01) \Leftrightarrow n \cdot \ln(0.89) > \ln(0.01) \\ &\Leftrightarrow n < \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.89)} \text{ car } \ln(0.89) < 0 \\ &\frac{\ln(0.01)}{\ln(0.89)} \approx 39.5 \end{aligned}$$

La plus grande valeur possible pour n est donc 39.

$$\begin{aligned} 2. \quad p(Z < n) > 0.75 &\Leftrightarrow 1 - p(Z = n) > 0.75 \\ &\Leftrightarrow 1 - 0.89^n > 0.75 \Leftrightarrow 0.25 > 0.89^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0.25) > n \cdot \ln(0.89) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0.25)}{\ln(0.89)} \\ &\frac{\ln(0.25)}{\ln(0.89)} \approx 11.9 \end{aligned}$$

La plus petite valeur possible pour n est donc 12.

103 Dans un lycée, 237 élèves ont réservé un repas à la cantine. Les statistiques montrent que lorsqu'un élève a réservé, 7 % du temps il ne mange pas à la cantine.

1. Le personnel de la cantine ne voulant pas gâcher de nourriture souhaite savoir quel est le nombre minimal k de repas à préparer tout en restant sûr à au moins 95 % que tous les élèves se présentant auront un repas. Déterminer k .

2. Même question avec un risque que certains élèves n'aient pas de repas inférieur à 1 %.

1. Soit X la v.a. qui compte le nb d'élèves qui ne mangent pas à la cantine. $X \sim B(237; 0.07)$

D'après la calculatrice, l'intervalle de fluctuation au seuil de confiance de 95 % est [9 ; 24].

Il devrait y avoir au moins 9 absents et le personnel peut préparer au minimum $237 - 9 = 228$ repas au seuil de confiance de 95%

109 La directrice d'une société de location de véhicules affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée.



Sous cette hypothèse, on considère les 600 premiers contrats signés l'année précédente et on appelle C le nombre de contrats de courte durée parmi tous ces contrats, supposés indépendants.

1. Décrire la loi de la variable aléatoire C .

2. En déduire un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à C .

3. 550 des 600 contrats étaient de courte durée.

a) Faire le lien avec la réponse à la question 2.

b) Que peut-on penser de l'affirmation de la directrice ?

1. Chaque contrat est de courte durée avec la probabilité 0.8. Les contrats sont indépendants les uns des autres. Il s'agit donc de 600 répétitions d'une même épreuve de Bernoulli avec $p(\text{Succès}) = 0.8$.

Donc $C \sim B(600; 0.8)$

2. D'après la calculatrice, l'intervalle de fluctuation au seuil de confiance de 95 % est [461 ; 499].

3. 550 $\notin$ [461 ; 499]. Cela se produit dans moins de 5% des cas. Il est donc probable que la directrice sous-évalue le pourcentage de clients qui prennent un contrat de courte durée.

130 Une urne

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une urne contient quatre boules rouges et n boules noires indiscernables au toucher. On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.

1. Justifier que cette succession de tirages est un schéma de Bernoulli et le représenter par un arbre

2. Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que

$$q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4} \right)^4$$

3. Quel est le plus petit entier

naturel n pour lequel $q_n \geq 0,9999$? Méthode 2 p. 371 Méthode 3 p. 373

1. Chaque tirage est identique et indépendant des autres et la probabilité de tirer une boule rouge est toujours de $\frac{4}{n+4}$. Soit

X la v.a. qui compte les boules rouges, on a : $X \sim B\left(4; \frac{4}{n+4}\right)$

$p(\text{au moins 1 noire}) = p(4 \text{ noires})$

$$= 1 - p(X = 4) = 1 - \left(\frac{4}{n+4} \right)^4$$

$$2. \quad 1 - \left(\frac{4}{n+4} \right)^4 \geq 0.9999 \Leftrightarrow 0.0001 \geq \left(\frac{4}{n+4} \right)^4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{0.0001} \geq \frac{4}{n+4} \Leftrightarrow 0.1 \geq \frac{4}{n+4} \Leftrightarrow 0.1n + 0.4 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{3.6}{0.1} \Leftrightarrow n \geq 36$$

Question 36.

Soit X la variable aléatoire indiquant le numéro de la face obtenue après le jet d'un dé truqué.

La loi de X est donnée par le tableau suivant :

$X = k$	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	0,1	p	0,1	0,1	0,2	0,3

Que vaut l'espérance de X ?

a. 0,2

b. 3

c. 3,5

d. 4

Question 37.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$: $X \leftarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$.

Sachant que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, nous avons $E(X^2) =$

a. $\frac{n^2}{2}$

b. $\frac{n^2}{4}$

c. $\frac{n(n+1)}{2}$

d. $\frac{n(n+1)}{4}$

Question 38.

Soient $p \in]0; 1[$ et n un entier naturel non nul. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p : $X \leftarrow \mathcal{B}(n, p)$. Nous avons $P(X = n) =$

a. 1

b. $(1-p)^n$

c. p^n

d. $1-p^n$

Attention! Pour les deux questions suivantes, on se place dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O . Un robot part de O et se déplace aléatoirement verticalement ou horizontalement, de telle manière qu'à chaque pas, soit son abscisse soit son ordonnée augmente. À chaque déplacement, la probabilité qu'il se déplace selon l'axe des abscisses est de 0,4.

Question 42.

Quelle est la probabilité que le robot arrive au point $M(7; 9)$ au bout de 16 étapes?

a. $\binom{9}{7} 0,4^9 0,6^7$

b. $\binom{9}{7} 0,4^7 0,6^{16}$

c. $\binom{16}{9} 0,4^9 0,6^7$

d. $\binom{16}{7} 0,4^7 0,6^9$

Question 43.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de déplacements du robot selon l'axe des abscisses, après 16 étapes. Déterminer l'espérance $E(X)$:

a. 8

b. 6,4

c. 6

d. 8,4