

Séquence VI – Dénombrements – p -listes et arrangements

p -listes

Exercice VI.1

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Exercice VI.2

Le code d'une carte bleu est un nombre à quatre chiffres, le premier pouvant être nul. Combien y a-t-il de codes possibles pour une carte bleue ?

Exercice VI.3

Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de la même façon et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers.
Justifier le titre de l'ouvrage.

Exercice VI.4

Pour son vélo, Éric possède un antivol à code qui est une succession de trois chiffres compris entre 0 et 9. Mais Éric a oublié son code !

- Combien de combinaisons doit-il essayer dans le pire des cas avant de retrouver la bonne ?
- Même question en supposant qu'Éric se souvient que son code
 - commence par le chiffre 8 ;
 - se termine par un chiffre pair ;
 - ne contient que des chiffres pairs ;
 - ne contient que des chiffres impairs ;
 - contient au moins un chiffre pair ;
 - contient exactement un chiffre pair.

Exercice VI.5

Au concours Kangourou, il y a 24 questions comportant chacune une et une seule réponse exacte parmi A, B, C, D et E .

- Combien y a-t-il de grilles réponses distinctes ?
- Combien y a-t-il de grilles réponses comportant exactement une bonne réponse ?
- Combien y a-t-il de grilles réponses comportant au moins une bonne réponse ?

Arrangements

Exercice VI.6

Calculer A_7^2 et A_5^5 à la main, puis vérifier les résultats grâce à la calculatrice.

Exercice VI.7

À l'occasion d'une compétition sportive regroupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent et une de bronze.

Combien y-a-t-il de podiums possibles (sans ex-æquo, et avant la compétition, bien sûr...) ?

Exercice VI.8

Dans une course de 20 chevaux, combien y a-t-il d'arrivées possibles sans ex-æquo des trois premiers (le « tiercé gagnant ») ?

Exercice VI.9

Pour cet exercice, on rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui comporte les mêmes lettres que celui-ci. Par exemple : IMAGE et MAGIE. Un mot est considéré comme sa propre anagramme.

- Quel est le nombre d'anagrammes (avec ou sans sens) du mot MATHS ?
- Quel est le nombre d'anagrammes (avec ou sans sens) du nom PASCAL ?
- Combien peut-on former de mots de trois lettres (avec ou sans sens) en utilisant une seule fois les lettres du mot FACTEUR ? Même question si elles sont éventuellement répétées ?

Exercice VI.10

Dans une ville de 32 000 habitants, le conseil municipal est composé de 39 membres. Les conseillers municipaux sont élus sur des listes de 39 membres, avec alternance Homme/Femme. Un parti politique dispose de 40 candidates et 60 candidats.

Il est déjà décidé que la tête de liste est Mme A, que le second de la liste sera obligatoirement M. B, suivi de Mme C, M. D et Mme E. Les autres conseillers municipaux peuvent être choisis parmi les candidat(e)s disponibles. Combien y a-t-il de listes possibles ?

Séquence VI – Dénombrements – combinaisons



Exercice VI.11

Il y a 24 élèves dans une classe de terminale. De combien de manières peut-on choisir des binômes de délégués (sans leurs suppléants) ?



Exercice VI.12

Calculer à la main, puis avec la calculatrice $\binom{8}{5}$.



Exercice VI.13

Un tirage du Loto est une combinaison de 6 numéros pris parmi 49, ainsi qu'un « numéro chance », de 1 à 5.

Combien y a-t-il de tirages possibles au Loto ?



Exercice VI.14

Une urne contient 9 boules, 4 noires et 5 blanches. On tire simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules noires dans le tirage. Déterminer la loi de probabilité de X , puis son espérance et sa variance.



Exercice VI.15

Au concours Kangourou, combien y a-t-il de grilles avec exactement 5 réponses correctes ? (les règles du Kangourou sont rappelés dans l'exercice 5)



Exercice VI.16

Une araignée se trouve en A sur une toile aux motifs carrés. Une mouche est immobilisée par la toile, au point M .



L'araignée souhaite attraper la mouche mais ne peut se déplacer que le long des filins de sa toile, vers la droite et vers le haut.

Combien de chemins différents peut prendre l'araignée pour atteindre la mouche ?

Séquence VI – Dénombrements – exercices variés



Exercice VI.17

Dans un jeu de 32 cartes, combien peut-on constituer de « mains » de 8 cartes ?



Exercice VI.18

On appelle « mot » une suite de deux points et cinq traits : $- \bullet - \bullet - - -$
Combien de tels mots peut-on écrire ?



Exercice VI.19

On réunit 5 personnes qui écrivent les unes après les autres leur mois de naissance sur une même feuille. Combien y a-t-il de résultats possibles ?



Exercice VI.20

Dix-huit personnes se rencontrent et chacune d'elles serre la main à chacune des autres. Quel est le nombre de poignées de main échangées ?



Exercice VI.21

Une association de 20 membres veut constituer un bureau formé de trois personnes : un(e) président(e), un(e) secrétaire, un(e) trésorier(e).
Combien de bureaux différents peut-on constituer ?



Exercice VI.22

Sur un damier de 4×4 cases, on place quatre jetons sur quatre cases différentes.

1. On suppose les jetons de quatre couleurs différentes. De combien de façons peut-on les disposer ?
2. On suppose les jetons identiques. De combien de façons peut-on les disposer ?



Exercice VI.23

Dans une classe composée de 17 filles et de 15 garçons, on veut choisir deux délégués.

1. De combien de façons ce choix peut-il se faire ?
2. On veut un délégué garçon et une déléguée fille. De combien de façons ce choix peut-il se faire ?



Exercice VI.24

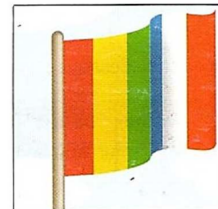
L'entrée d'un immeuble est commandée par un appareil à digicode. Un code comporte cinq éléments, trois chiffres et deux lettres.

1. On suppose que le code est formé de trois chiffres puis de deux lettres dans cet ordre.
 - (a) Combien y a-t-il de codes possibles ?
 - (b) Combien de codes commencent-ils par trois chiffres identiques ?
 - (c) Combien de codes ont-ils trois chiffres différents ?
2. On suppose maintenant que le code est formé de trois chiffres et de deux lettres, pas forcément dans cet ordre.
 - (a) Combien y a-t-il de codes possibles ?
 - (b) Combien de codes comportent-ils deux lettres identiques ?



Exercice VI.25

On veut colorier les six bandes du drapeau, en utilisant 5 couleurs au maximum et de façon que deux bandes voisines n'aient pas la même couleur.



Combien y a-t-il de drapeaux possibles ?



Exercice VI.26

En informatique, on appelle octet une liste de huit éléments pris dans l'ensemble $\{0; 1\}$. Par exemple : 01001100 ou 11100011 sont des octets.

1. Combien y a-t-il d'octets possibles ?
2. Combien y a-t-il d'octets commençant par 0 et se terminant par 0 ?
3. Combien y a-t-il d'octets comportant exactement quatre 1 ?



Exercice VI.27

(plus difficile...) On considère une grille de mots croisés de 5×5 cases. Pourquoi peut-on affirmer sans calcul qu'il y a autant de grilles avec 5 cases noires que de grilles avec 20 cases noires ?

Séquence VI – Loi binomiale

Exercice VI.28

Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans une entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq amis.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés.
On arrondira à 10^{-3} près.

Exercice VI.29

Un magasin vend des moteurs électriques identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12. Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin. On admet que le nombre de moteurs vendus est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

Exercice VI.30

On considère un questionnaire comportant cinq questions. Pour chacune d'elles, trois propositions de réponses sont faites, une seule d'entre elles étant exacte. Un professeur demande à ses 28 élèves de répondre au hasard à chaque question de ce questionnaire. On note X le nombre d'élèves n'ayant aucune réponse exacte.

1. Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} , qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

Exercice VI.31

Une entreprise de location propose à ses clients deux types de bateaux de tourisme : bateau à voile et bateau à moteur. Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou à moteur, est loué avec un pilote. On admet que la probabilité qu'un client donné prenne l'option PILOTE est égale à 0,42. On considère un échantillon aléatoire de quarante clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. On admet que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} près, qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE.

Exercice VI.32

Au cours de la fabrication de verres de lunettes, le verre doit subir un traitement. On estime que 10 % des verres présentent alors un défaut pour ce traitement. On prélève, au hasard, un échantillon de 50 verres dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de paires de verres qui présentent un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres qui présentent un défaut, puis le résultat arrondi à 10^{-3} .
3. En moyenne, combien de paires de verres ayant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 paires ?

Exercice VI.33

Le groupe sanguin O négatif (auss appelé donneur universel) représente environ 6 % de la population française. 50 personnes se présentent à un don de sang. On note X le nombre de ces personnes qui sont du groupe O négatif.

1. On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'au moins deux de ces personnes soient du groupe O négatif.
3. Calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercise VI.34

Dans cet exercice, les probabilités calculées seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} près. Une entreprise produit des stylos en grande quantité. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est de 0,1. On prélève 10 stylos dans le stock de cette entreprise. On suppose que le nombre de stylos produits est suffisamment grand pour que cette sélection soit assimilée à des tirages indépendants et avec remise. On note X le nombre de stylos défectueux ainsi prélevés.

1. Quelle est la loi de X ?
On précisera ses paramètres.
2. Donner l'espérance et la variance de X .
3. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement un stylo défectueux.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un stylo défectueux.
5. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux stylos défectueux.

Exercise VI.35

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$. Calculer la probabilité $P_{X \geq 5}(X \leq 8)$.

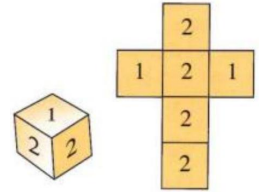
Exercise VI.36

Eine Urne enthält eine schwarze und vier rote Kugeln. Es werden nacheinander 10 Kugeln gezogen, wobei nach jedem Zug die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt wird.

1. Wie viele schwarze Kugeln sind zu erwarten ?
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse :
A : „Genau zwei Kugeln sind schwarz“,
B : „Nur die erste Kugel ist schwarz“,
C : „Genau vier Kugeln sind schwarz“,
D : „Mindestens zwei Kugeln sind schwarz“,
E : „Höchstens zwei Kugeln sind schwarz“.
3. Wie viele Kugeln muss man aus dieser Urne mit Zurücklegen mindestens ziehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95 % erwartet werden kann, dass sich unter den gezogenen Kugeln mindestens eine schwarze befindet ?
4. Es wird folgendes Spiel angeboten : Der Spieler erhält 4 € ausbezahlt, wenn 9 der 10 gezogenen Kugeln rot sind, und 8 € für 10 rote Kugeln. Bei welchem Einsatz ist das Spiel fair ?

Exercise VI.37

Ein Würfel mit dem abgebildeten Würfelnetz wird sechsmal geworfen.



1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse :
A : „Es tritt keine Eins auf“,
B : „Es treten genau 3 Zweien auf“,
C : „Es treten höchstens 2 Zweien auf“,
D : „Es treten mindestens 5 Zweien auf“.
2. Wie viele Zweien sind im Mittel zu erwarten, wenn man den Würfel 30-mal wirft ?
3. Wie oft ist der Würfel zu werfen, damit das Ereignis E : „Es tritt mindestens eine Eins auf“ mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% eintritt ?
4. Der Würfel wird zweimal geworfen. Die erste Zahl wird für den Koeffizienten b , die zweite Zahl für den Koeffizienten c in der quadratischen Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ gewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergeben sich dabei quadratische Gleichungen mit mindestens einer reellen Lösung ?

Exercise VI.38

Bei einer Nachrichtenübertragung werden zwei Signale (Zeichen) 0 und 1 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 93% richtig übertragen.

1. Eine Sequenz besteht aus 7 Zeichen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse :
A : „Die Sequenz wird fehlerfrei übertragen“,
B : „Nur die ersten vier Zeichen werden fehlerfrei übertragen“,
C : „Fünf Zeichen werden fehlerfrei übertragen“,
D : „Nur ein Zeichen, und zwar das vierte oder das fünfte, wird fehlerhaft übertragen“.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden von 9 aufeinander folgenden Sequenzen (aus je 7 Zeichen) mindestens 7 Sequenzen richtig übertragen ?
3. Wie viele fehlerfreie Zeichen sind bei einer Sequenz aus 2000 Zeichen zu erwarten ?
4. Wie groß ist die Standardabweichung von dem erwarteten Wert ?

Exercise VI.39

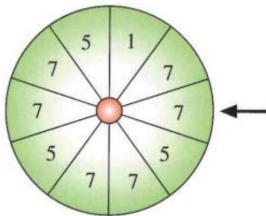
Ein Schütze schießt auf Tontauben mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von 70%.

1. Ist es wahrscheinlicher, dass er 4 von 8 Tontauben trifft oder 8 von 16?
2. Ist es wahrscheinlicher, dass er mindestens 4 von 8 Tontauben trifft oder mindestens 8 von 16?
3. Welche Trefferwahrscheinlichkeit muss der Schütze mindestens haben, um bei 3 Versuchen mindestens einen Treffer mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 90% zu erzielen?

Exercise VI.40

Bei dem abgebildeten Glücksrad tritt jedes der 10 Felder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Das Glücksrad wird zehnmal gedreht.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse :
A : „Es tritt höchstens einmal die 1 auf“,
B : „Es tritt mindestens einmal die 5 auf“,
C : „Es tritt genau sechsmal die 7 auf“.



- D : „Es tritt mindestens sechsmal die 7 auf“,
E : „Es tritt beim 10. Versuch zum 5. Mal die 7 auf“.
2. Wie viele Fünfen sind im Durchschnitt zu erwarten?
 3. Es wird folgendes Spiel angeboten : Der Einsatz pro Spiel beträgt 4€. Dann wird das abgebildete Glücksrad dreimal gedreht. Bei drei Einsen erhält der Spieler 100 € ausbezahlt, bei drei Fünfen 50 € und bei drei Siebenen 10 €
Ist das Spiel für den Spieler langfristig günstig?
 4. Wie muss der Einsatz bei dem Spiel aus c) geändert werden, damit das Spiel fair wird?

Exercise VI.41

Ein Unternehmen produziert Bauteile, von denen durchschnittlich 10% defekt sind. Der laufenden Produktion werden 20 Bauteile entnommen.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse :
A : „Es sind genau 5 Bauteile defekt“,
B : „Es sind höchstens 2 Bauteile defekt“,
C : „Es ist kein Teil defekt“,
D : „Es sind mindestens 2 Teile, aber höchstens 5 Teile defekt“,
E : „Es sind mindestens 3 Teile defekt“.
2. Wie viele defekte Teile sind bei der Stichprobe zu erwarten?
3. Wie groß ist die Standardabweichung vom erwarteten Wert?
4. Wie viele Bauteile müsste man entnehmen, um mindestens ein defektes Bauteil mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99% zu erhalten?

À garder ?

Exercice VI.42

> Si les tirages étaient sans répétition possible mais ordonnés, combien y en aurait-il ?

> En dénombrant ainsi les tirages, chaque tirage est compté 6 fois trop : pourquoi ?

En déduire le nombre de tirages non ordonnés et sans répétition possible.

> Si l'urne comprenait 10 boules de couleurs différentes et qu'on en tire simultanément 5, combien y aurait-il de tirages non ordonnés et sans répétition possible ?

> Si l'urne contenait n boules et qu'on en tire simultanément p où $(1 \leq p \leq n)$, combien y aurait-il de tirages non ordonnés et sans répétition possible ?

Exercice VI.44

Au poker, on appelle main un ensemble de 5 cartes prises parmi 52 cartes, sans ordre ni répétition.

Un jeu de 52 cartes est formé de 4 couleurs : trèfle, carreau, cœur, pique, contenant chacune treize valeurs de cartes : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As.

Une main peut contenir certains sous-ensembles de cartes appelés annonces.

Parmi ces annonces se trouvent :

- La quinte flush : cinq cartes de valeurs consécutives d'une même couleur.
- Le carré : quatre cartes de la même valeur.
- Le full : trois cartes de la même valeur d'une part et deux cartes de la même valeur d'autre part.
- La quinte : cinq cartes de valeurs consécutives de différentes couleurs.
- Le brelan : trois cartes de la même valeur qui ne forment avec les deux autres de la main, ni full ni carré.

Déterminer pour chacune de ces annonces, le nombre de mains qui permettent cette annonce.

Exercice VI.43

Un QCM est formé de cinq questions. Pour chacune des cinq questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Les réponses sont cochées sur une grille-réponse.

1. Combien y a-t-il de grilles réponses possibles ?
2. Combien y a-t-il de grilles avec toutes les réponses exactes ?
3. Combien y a-t-il de grilles avec exactement quatre réponses exactes ?
4. Combien y a-t-il de grilles avec exactement trois réponses exactes ?

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1 Il y a 3 choix pour l'entrée, 2 choix pour le plat et 4 choix pour le dessert, il y a donc $3 \times 2 \times 4 = 24$ menus différents.

Solution de l'exercice 2 Le code s'écrit avec quatre chiffres, et chacun des chiffres est un entier compris entre 0 et 9. Il y a donc 10 possibilités pour chacun des chiffres, c'est-à-dire $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ codes possibles.

Solution de l'exercice 3 Un poème est une liste de 14 nombres choisis parmi 10 (le premier nombre désignant le numéro de page où est sélectionné le premier vers, et ainsi de suite). Il y a 10 possibilités pour le premier vers, 10 pour le deuxième, ..., 10 pour le quatorzième, il y a 10^{14} poèmes possibles, c'est-à-dire 100 000 000 000 000 poèmes possibles, ce qui correspond au titre du recueil.

Solution de l'exercice 4

1. Éric doit essayer 10^3 combinaisons au maximum.
2. (a) $1 \times 10 \times 10 = 10^2 = 100$
(b) $10 \times 10 \times 5 = 500$
(c) $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$
(d) $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$
(e) $1000 - 125 = 875$ (c'est la différence entre le nombre total de codes et le nombre de codes qui ne contiennent que des chiffres impairs).

On peut aussi ajouter le nombre de codes ayant un chiffre pair en première position (puis n'importe quel chiffre ensuite), puis un chiffre impair en première position, un chiffre pair en deuxième position et n'importe quel chiffre ensuite, et enfin un chiffre impair en première et en deuxième position, et un chiffre pair en troisième position. On obtient alors le même résultat, écrit :

$$5 \times 10 \times 10 + 5 \times 5 \times 10 + 5 \times 5 \times 5 = 500 + 250 + 125 = 875$$

$$(f) 5 \times 10 \times 10 + 10 \times 5 \times 10 + 10 \times 10 \times 5 = 3 \times 5 \times 10 \times 10 = 1500$$

Solution de l'exercice 5

1. 5^{24}
2. $1 \times 4^{23} + 4 \times 1 \times 4^{22} + \dots + 4^{23} \times 1 = 24 \times 4^{23}$
3. $5^{24} - 4^{24}$, car le nombre de grille ayant au moins une mauvaise réponse est égal à la différence entre le nombre total de grilles et le nombre de grille ayant strictement moins qu'une bonne réponse (c'est-à-dire le nombre de grilles n'ayant aucune bonne réponse).

Solution de l'exercice 6

$$A_7^2 = 7 \times 6 = 42$$

et

$$A_5^5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Et en effet

rad CALCULS	
permute(7,2)	42
permute(5,5)	120

Solution de l'exercice 7 Il y a A_{18}^3 solutions possibles, et

$$A_{18}^3 = 18 \times 17 \times 16 = 4896$$

Il y a donc 4896 podiums possibles.

Solution de l'exercice 8 Il s'agit de choisir un arrangement de trois chevaux (sans répétition car il n'y a pas d'ex-æquo). Ainsi, on calcule A_{20}^3 , c'est-à-dire

$$A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$$

Il y a donc 6840 podiums possible.

Solution de l'exercice 9

1. Une anagramme est un mot obtenu en effectuant une permutation des lettres du mot initial. Le mot MATHS contient 5 lettres. Il y a donc $5!$ permutations possibles, c'est-à-dire $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ anagrammes possibles.

Une anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot. On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombre de permutations entre lettres identiques. On trouve donc : $\frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360$

3. Il y a A_6^3 façons de former des mots de trois lettres (avec ou sans sens) en utilisant une seule fois les lettres du mot FACTEUR, c'est-à-dire $6 \times 5 \times 4 = 120$ façons.

Si on accepte que les lettres soient répétées, on cherche alors à former une 3-liste en prenant des lettres du mot FACTEUR (donc parmi 6 lettres distinctes). Il y a $6^3 = 216$ mots qui peuvent être formés.

Solution de l'exercice 10 Les choix sont faits avec ordre et sans répétition, car la liste électorale est ordonnée et une personne ne peut occuper deux postes à la fois. On commence par choisir une femme, il y a 19 femmes dans la liste (nombre de nombre impairs entre 1 inclus et 39 inclus). il va falloir en choisir A_{40}^{20} . Puis, pour les hommes, il va falloir en choisir 19 (c'est-à-dire le nombre d'hommes sur la liste électorale). On calcule donc A_{60}^{19} .

$$A_{40}^{20} = 40 \times 39 \times 38 \times \dots \times 21$$

$$A_{60}^{19} = 60 \times 59 \times 58 \times \dots \times 42$$

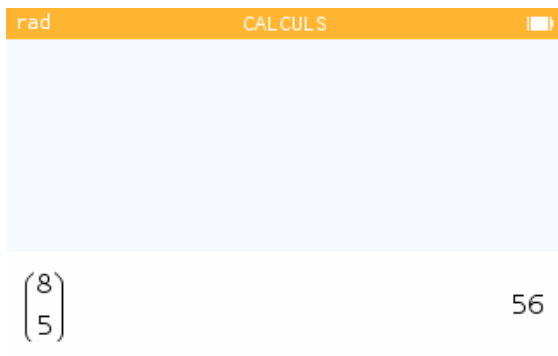
Puis, on multiplie les résultats entre eux (le principe est multiplicatif). Ainsi, il y a $A_{40}^{20} \times A_{60}^{19}$ résultats d'élection possibles.

Solution de l'exercice 11 $\binom{24}{2} = 276$

Il y a 276 manières de choisir les binômes de délégués (sans leurs suppléants).

Solution de l'exercice 12

$$\begin{aligned} \binom{8}{5} &= \frac{8!}{5!(8-5)!} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 8 \times 7 \\ &= 56 \end{aligned}$$



Solution de l'exercice 13 On choisit d'abord 6 numéros parmi 49 sans tenir compte de l'ordre, puis un numéro chance parmi 5. Il y a donc

$$\binom{49}{6} \times \binom{5}{1}$$

grilles possibles, c'est-à-dire $\binom{49}{6} \times 5$, ou encore 69 919 800 grilles possibles.

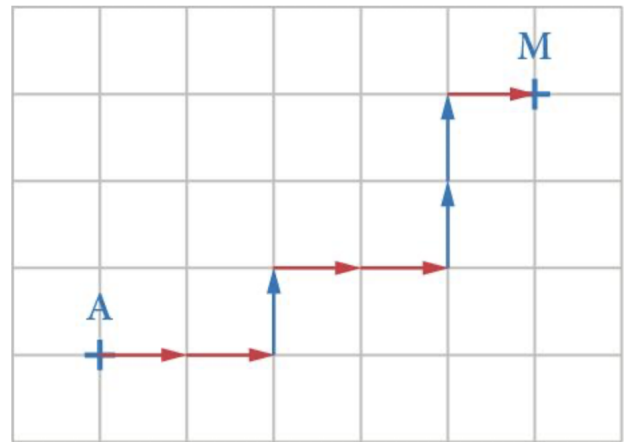
Solution de l'exercice 14

Solution de l'exercice 15 On choisit tout

d'abord l'emplacement des 5 bonnes réponses. Il y a $\binom{24}{5}$ réponses possibles. Puis, pour chacune des 19 réponses fausses, il y a 4 possibilités. Ainsi, il y a $\binom{24}{5} \times 4^{19}$ grilles avec exactement 5 réponses correctes.

Solution de l'exercice 16 Le nombre total de cases à parcourir par l'araignée, pour atteindre la mouche, est de 5 cases horizontalement et de 3 cases verticalement.

Il s'agit donc de créer un chemin dans lequel on représente par D le déplacement d'une case vers la droite et par H le déplacement d'une case vers le haut. Par exemple, un chemin possible est $DDHDDHHD$, représenté ci-dessous.



On doit dénombrer le nombre de chemins. On est donc amené à créer des « mots » de $5 + 3 = 8$ lettres. On se pose la question du nombre de manières de choisir les emplacements des 5 lettres D dans le « mot ». On peut choisir les 5 emplacements de D parmi les 8 positions possibles. Or,

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

Il y a donc 56 manières de choisir les emplacements de la lettre D dans les « mots ».

La manière de choisir les emplacements de la lettre D dans le « mot » va induire les emplacements de la lettre H dans le « mot ».

Conclusion : il existe 56 chemins différents qui permettent à l'araignée d'atteindre la mouche.

Remarque : Par symétrie, il est équivalent de chercher à déterminer le nombre de manières de placer les 3 lettres H parmi les 8 positions possibles :

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{8-3} = \binom{8}{5} = 56$$

Solution de l'exercice 17 Une main est une collection de 8 cartes choisies parmi 32. On ne tient pas

compte de l'ordre. Ainsi, il y a $\binom{32}{8}$ mains possibles, c'est-à-dire 10 518 300 mains possibles.

Solution de l'exercice 18 Pour écrire un tel mot, on choisit l'emplacement des deux points parmi 7 emplacements. Ainsi, il y a $\binom{7}{2}$ choix possibles, c'est-à-dire 21 choix possibles.

Solution de l'exercice 19 Un résultat est une liste de 5 mois de naissances (il y a 12 possibilités à chaque fois), avec ordre. Ainsi, il y a $12^5 = 248\,832$ résultats possibles.

Solution de l'exercice 20 Le nombre de poignées de mains est le nombre de façons de choisir 2 personnes parmi 18, sans tenir compte de l'ordre. Ainsi, il y a $\binom{18}{2}$, c'est-à-dire 153 poignées de mains échangées.

Solution de l'exercice 21 Un bureau est une liste de 3 personnes, mais chaque personne ne peut tenir qu'un rôle dans le bureau. Il y a donc A_{20}^3 bureaux différents possibles, c'est-à-dire $20 \times 19 \times 18 = 6840$ bureaux possibles.

Solution de l'exercice 22

1. Si on place des jetons de couleurs différentes parmi les $4 \times 4 = 16$ cases, cela revient à choisir 4 cases avec ordre (car les couleurs imposent un ordre) et sans remise (on ne peut pas mettre deux pions sur la même case). Ainsi, on peut les disposer de $A_{16}^4 = 16 \times 15 \times 14 \times 13 = 43\,680$ façons.
2. Si on place des jetons sans couleurs les $4 \times 4 = 16$ cases, cela revient à choisir 4 cases sans ordre et sans remise. Ainsi, on peut les disposer de $\binom{16}{4} = 1820$ façons.

Solution de l'exercice 23

1. Il y a $\binom{32}{2} = \frac{32 \times 31}{2} = 496$ façons de choisir les délégués (car un binôme de délégués et un choix de deux élèves parmi 32, sans ordre et sans remise).
2. On choisit un délégué parmi les garçons et un autre parmi les filles. Ainsi, il y a $17 \times 15 = 255$ binômes de délégués possibles avec cette contrainte.

Solution de l'exercice 24

1. (a) Il y a $10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 676\,000$ digicodes possibles.
(b) Si les trois premiers chiffres sont identiques, il y a 10 choix possibles pour les trois premiers chiffres, puis 26×26 choix pour les lettres. Il y a donc 6 760 digicodes possibles commençant par trois chiffres identiques.
(c) $10 \times 9 \times 8 \times 26 \times 26 = 486\,720$.
2. (a) Sans tenir compte de l'ordre, il s'agit donc de prendre 3 nombres sans ordre et sans remise

parmi 10 et 2 lettres parmi 26. Il y a donc $\binom{10}{3} \times \binom{26}{2} = 120 \times 325 = 39\,000$ codes possibles.

- (b) Puisqu'on cherche les codes comportant deux lettres identiques, il s'agit de choisir une lettre parmi 26 (cette lettre aura deux emplacements) et 3 chiffres parmi 10. Ainsi, il y a $\binom{10}{3} \times 26 = 120 \times 26 = 4\,320$ digicodes possibles.

Solution de l'exercice 25 Il s'agit de colorier les couleurs de la première à la dernière.

Il y a 5 couleurs possibles pour la première.

Puisqu'il ne faut pas que deux bandes voisines aient la même couleur, il y a 4 possibilités pour la deuxième. Il y a alors 4 possibles pour la troisième, puis 4 possibilités pour la quatrième, 4 pour la cinquième et 4 pour la sixième.

Ainsi, il y a au total $5 \times 4^5 = 5\,120$ façons de colorier le drapeau.

Solution de l'exercice 26

1. Un octet est une liste ordonnée d'éléments avec ordre et avec remise. Ainsi, un octet est une 8-listes, et il y a $2^8 = 256$ octets possibles.
2. Il y a $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 2^6 = 64$ octets commençant par un 0 et terminant par un 0.
3. Puisqu'il y a exactement quatre 1 à placer, il s'agit de choisir l'emplacement des quatre 1 parmi les huit disponibles, le reste étant des 0. Ainsi, il y a $\binom{8}{4} = 70$ octets avec exactement quatre 1.

Solution de l'exercice 27 Le nombre de façons d'avoir 5 cases noires est le même que celui de « ne pas avoir 5 » cases blanches, la couleur importe peu... En terme de coefficients binomiaux, cela vient de l'égalité $\binom{25}{5} = \binom{25}{25-5}$, c'est-à-dire $\binom{25}{5} = \binom{25}{20}$

Solution de l'exercice 28

1. On répète de façon indépendante 5 fois une expérience de Bernoulli dont la probabilité du succès est 0,07. Donc la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (ici le nombre de personnes recrutées) suit une loi $\mathcal{B}(5; 0,07)$.
2. En utilisant la formule du cours on a directement :

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{5}{2} \times 0,07^2 (1 - 0,07)^3 \\ &= 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3 \\ &\approx 0,039 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 29

Solution de l'exercice 30 $\frac{32}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

Solution de l'exercice 31**Solution de l'exercice 32****Solution de l'exercice 33****Solution de l'exercice 34****Solution de l'exercice 35**

Solution de l'exercice 36 a) X sei die Anzahl der schwarzen gezogenen Kugeln. $X \sim B\left(10; \frac{1}{5}\right)$

$$E(X) = np = 10 \times \frac{1}{5} = 2 \quad 2 \text{ schwarze Kugeln sind zu erwarten}$$

b) $p(A) = p(X = 2), p(B) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^4, p(C) = p(X = 4)$
und $p(D) = p(X \leq 2)$

c) $Y \sim B\left(n; \frac{1}{5}\right)$

$$p(Y \geq 1) \geq 0,95 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,8} \quad \frac{\ln 0,05}{\ln 0,8} \approx 13,4$$

also $n \geq 14$

d) $X \sim B\left(10; \frac{1}{5}\right)$

$$p(X = 10) = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{5^{10}}, p(X = 9) = \binom{10}{9} \frac{1}{5} \frac{4^9}{5^9} = 10 \times \frac{1}{5^9} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5^9} \text{ und } p(X \leq 8) = 1 - \frac{1}{5^2} - \frac{8}{5^9}$$

$$E(X) = 8 \cdot p(X = 10) + 4 \cdot p(X = 9) + 0 \cdot p(X \leq 8) = 8 \cdot \frac{1}{5^2} + 4 \cdot \frac{8}{5^9} \approx 0,32$$

Das Spiel ist fair bei einem Einsatz von 0,32£.

Solution de l'exercice 37 X sei die Anzahl der Zweien. $X \sim B\left(6; \frac{2}{3}\right)$

a) $p(\text{keine Eins}) = p(\text{nur Zweien}) = p(X = 6) = \binom{6}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0,088$

$$p(B) = p(X = 3) = \binom{6}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{6-3} \approx 0,219$$

$$p(C) = p(X \leq 2) \approx 0,100$$

$$p(D) = p(X \geq 5) \approx 0,351$$

b) $X \sim B\left(30; \frac{2}{3}\right)$ und $E(X) = np = 30 \times \frac{2}{3} = \frac{60}{3} = 20$
Wenn man den Würfel 30-mal wirft, ist im Mittel eine Anzahl von 20 Zweien zu erwarten.

c) Sei n die Anzahl der Würfelwürfe. $X \sim B\left(n; \frac{2}{3}\right)$
Wir wollen die folgende Ungleichung lösen: $p(X \geq 1) > 0,95$

$$p(X \geq 1) > 0,95 \Leftrightarrow 1 - p(X = 0) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow 0,05 > p(X = 0)$$

$$\Leftrightarrow 0,05 > \binom{n}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow 0,05 > \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,05) > \ln\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,05) > n \cdot \ln \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,05)}{\ln \frac{1}{3}} < n$$

$$\frac{\ln(0,05)}{\ln \frac{1}{3}} \approx 2,73. \text{ Also } n \geq 3$$

Der Würfel muss mindestens dreimal geworfen werden, damit das Ereignis E: „Es tritt mindestens eine Eins auf“ mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% eintritt.

d) Wir wissen, dass $b = 1$ oder $b = 2$ und, dass $c = 1$ oder $c = 2$.

Wir haben also 4 mögliche Gleichungen, die wir untersuchen müssen:

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0 \text{ keine reelle Lösung}$$

$$x^2 + x + 2 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 8 < 0 \text{ keine reelle Lösung}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0 \text{ eine reelle Lösung}$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 < 0 \text{ keine reelle Lösung}$$

Wir wollen also ein Zweier beim ersten Wurf und ein Eins beim zweiten Wurf.

$$p = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Solution de l'exercice 38 a) X sei die Anzahl der fehlerfreien Zeichen in der Sequenz. $X \sim B(7; 0,93)$

Attention pour les événements B et D, il ne s'agit pas de la loi binomiale mais seulement d'un chemin particulier (ou deux) sur l'arbre pondéré (en imaginant qu'on l'ait tracé)

$$p(A) = p(X = 7) = 0,93^7 \approx 0,602$$

$$p(B) = 0,93 \times 0,93 \times 0,93 \times 0,93 \times 0,07 \times 0,07 \times 0,07 \approx 0,0003$$

$$p(C) = p(X = 5) = \binom{7}{5} 0,93^5 0,07^2 \approx 0,072$$

$$p(D) = 0,93^6 \times 0,07 \times 2 \approx 0,091$$

b) Eine Sequenz wird mit der Wahrscheinlichkeit 0,602 richtig übertragen.

Y sei die Anzahl der fehlerfreien Sequenzen. $Y \sim B(9; 0,602)$

$$p(Y = 7) = \binom{9}{7} 0,602^7 0,398^2 \approx 0,163$$

$$c) Z \sim B(2000; 0,93)$$

$$E(Z) = 2000 \times 0,93 = 1860$$

1860 fehlerfreie Zeichen sind bei einer Sequenz aus 2000 Zeichen zu erwarten.

d) Standardabweichung heißt „écart-type“.

$$V(Z) = np(1-p) = 2000 \times 0,93 \times 0,07 = 130,2 \text{ und}$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} \approx 11,4$$

Solution de l'exercice 39**Solution de l'exercice 40****Solution de l'exercice 41****Solution de l'exercice 42****Solution de l'exercice 43****Solution de l'exercice 44**

