

Optimisation linéaire

Exemple :

Les jumeaux Franz et Franziska souhaitent créer un cocktail sans alcool pour leur fête d'anniversaire. Ils peuvent utiliser un récipient d'une capacité de 20 litres hérité de leur arrière-grand-mère, et veulent obtenir au moins 15 litres de boisson. Les ingrédients possibles sont les suivants :

- Jus de framboise, le litre à 1,00 €.
- Concentré de mangue, le litre à 2,00 €.

Le concentré de mangue ayant un goût très prononcé, sa proportion ne doit pas dépasser un tiers du cocktail.

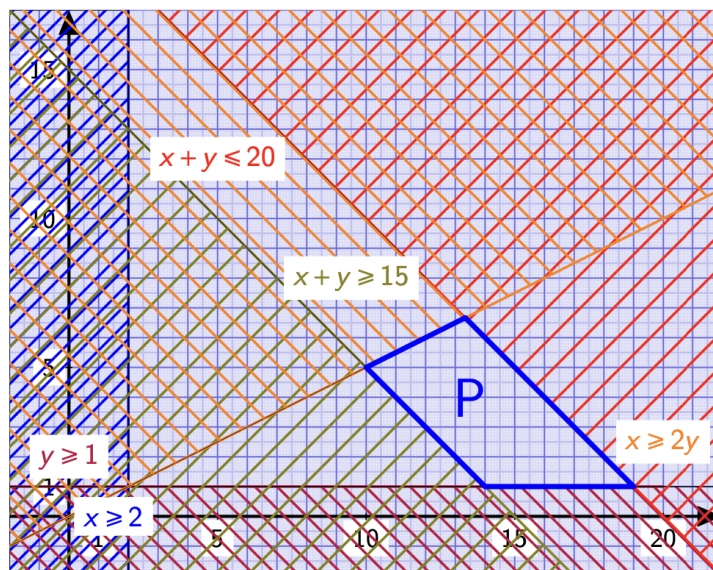
Franz et Franziska disposent déjà de deux litres de jus de framboise et d'un litre de concentré de mangue. Comment trouver une combinaison qui remplit les conditions et qui coûte le moins cher possible ?

Nous devons trouver des (in)équations qui traduisent les conditions de l'énoncé. Pour cela, désignons les quantités de jus de framboise et de concentré de mangue (en litres) respectivement par x et y .

Pour commencer, nous ne nous occupons que de ce qui est possible, nous aborderons le coût plus tard. Les conditions sont les suivantes :

- au moins deux litres de jus de framboise doivent être utilisés : $x \geq 2$
- au moins un litre de concentré de mangue doit être utilisé : $y \geq 1$
- le mélange doit tenir dans le pot de 20 litres : $x + y \leq 20$
- Ils veulent obtenir au moins 15 litres du mélange : $x + y \geq 15$
- Dans le mélange, il doit y avoir au maximum un tiers de mangue ; c'est-à-dire que la quantité de jus de framboise doit être au moins le double de la quantité de concentré de mangue : $x \geq 2y$

Il y a deux variables x et y , cela incite à représenter ces conditions dans un repère du plan :



■ DÉFINITION :

La partie non hachurée du plan correspond aux points dont les coordonnées sont les solutions possibles.

Cette zone est appelée **polygone des contraintes**.

Suite à l'exemple : Le coût du cocktail

Jusqu'à présent, nous nous sommes seulement intéressés à ce qui entrerait en ligne de compte. Nous allons maintenant nous intéresser au coût.

Calculons les coûts pour quelques combinaisons possibles :

Jus de framboise (en litres)	10	11	12	12	13	13	13	14	14	15	16	17	19
Concentré de mangue (en litres)	5	5	3	5	4	5	6	2	4	3	1	2	1
Coût (en euros)	20	21	18	22	21	23	26	18	22	21	18	21	21

Nous avons obtenu plusieurs combinaisons pour 21 € et plusieurs pour 18 €.

Si deux combinaisons différentes entraînent un coût de 18 €, elles vérifient l'équation

$$x + 2y = 18$$

Ou encore

$$y = -\frac{1}{2}x + 9$$

C'est une équation de droite.

Les combinaisons ayant un coût de 18 € correspondent chacune à un point de cette droite.

Les points situés au-dessus de la droite correspondent à un coût plus élevé.

Les points situés en dessous de la droite correspondent à un coût plus faible.

Notre objectif est de minimiser le coût, c'est-à-dire de rendre minimum la valeur de $x + 2y$.

On définit alors une fonction à deux variables $f(x, y) = x + 2y$. On parle de **fonction objectif**.

Ici, le minimum est atteint en $(x, y) = (14, 1)$.

Dans des exercices similaires, les droites de même coût sont toujours parallèles. Les coûts minimums (ou maximums si on les cherche) apparaissent toujours dans un coin ou sur un côté du polygone des contraintes

■ DÉFINITION :

La **fonction objectif** est une fonction numérique de deux variables qui décrit ce que l'on cherche à optimiser.

On cherche soit à minimiser soit à maximiser la fonction objectif.

■ MÉTHODE : Comment optimise-t-on la fonction objectif / le coût ?

$$f(x, y) = x + 2y$$

On fixe une valeur pour le coût, disons $f(x, y) = K$ puis on exprime y en fonction x :

$$K = x + 2y \text{ c'est-à-dire } y = -\frac{1}{2}x + \frac{K}{2}$$

On constate que pour une valeur du coût donnée, les valeurs de x et y correspondantes sont les coordonnées des points d'une même droite qu'on peut tracer.

Si on change la valeur de K , on va obtenir une autre droite qui sera parallèle à la précédente car la pente ne change pas de valeur.

Pour minimiser le coût, on va donc chercher à tracer la droite parallèle permettant d'obtenir ce minimum.

Compléter le graphique avec deux droites correspondantes à des coûts de 0 € et de 20 €. Puis chercher la droite qui minimise le coût et indiquer la combinaison (x, y) qui permet de minimiser le coût.

Optimisation linéaire

1. Quelques rappels sur les systèmes linéaires d'équations :

Pour certains abonnés, il y a deux tarifs pour le prix du kilowattheure (kWh) électrique, l'un est dit « heures creuses », l'autre « heures pleines ». On dispose des deux factures suivantes :

Première facture		
Consommation Heures creuses (en kWh)	Consommation Heures pleines (en kWh)	Montant total (en €)
1848	753	1244,40

Seconde facture		
Consommation Heures creuses (en kWh)	Consommation Heures pleines (en kWh)	Montant total (en €)
1107	1362	1401,3

On note c le prix d'un kWh en heures creuses et p le prix d'un kWh en heures pleines.

1. Exprimer en fonction de c et p le montant de chacune des deux factures.

$$\begin{cases} 1848c + 753p = 1244,40 \\ 1107c + 1362p = 1401,30 \end{cases}$$

2. En déduire, à l'aide de la calculatrice, le prix d'un kWh en heures creuses et d'un kWh en heures pleines.

$$\begin{cases} c = 0,38 \\ p = 0,72 \end{cases}$$

3. Quel est le montant de la facture d'électricité pour une personne qui aurait consommé 1400 kWh en heures creuses et 650 kWh en heures pleines ?

Le montant de la facture d'électricité est

$$1400c + 650p$$

c'est-à-dire 1000 euros.

4. On note respectivement x et y le prix d'un kWh consommé par une personne en heures creuses et en heures pleines.

Dans le repère orthogonal ci-dessous, représenter l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ qui correspondent à un montant de facture de 1000 €. Faire de même pour une facture de 1500 € puis 2500 €.



$$1400x + 650y = 1000$$

$$1400x + 650y = 1500$$

$$1400x + 650y = 2500$$

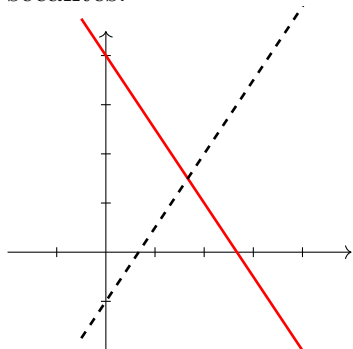
■ DÉFINITION :

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y est un système de la forme
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
 où a, b, c, a', b' et c' sont six nombres réels tels que les couples $(a; b)$ et $(a'; b')$ soient distincts du couple $(0; 0)$.

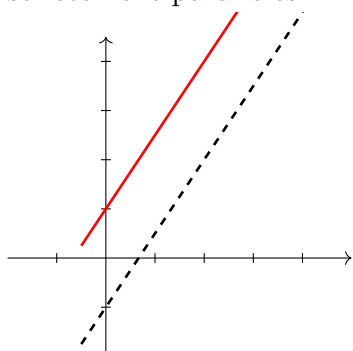
Remarque : Comme dans l'exemple précédent, les équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ peuvent s'interpréter, comme les équations de deux droites.

La résolution du système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ peut donc s'interpréter comme la recherche de l'intersection de deux droites. Ainsi, selon la position relative de ces deux droites, un tel système possède :

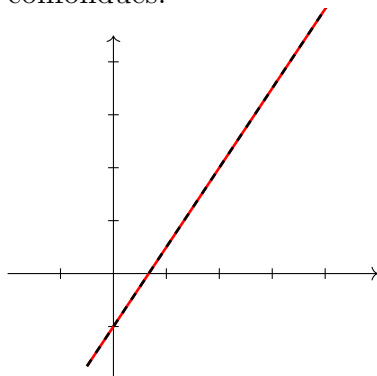
- Une unique solution si les deux droites sont sécantes.



- Aucune solution si les deux droites sont strictement parallèles.



- Une infinité de solutions si les deux droites sont confondues.



2. Système d'inéquations linéaires à deux inconnues

Exemple :

On veut organiser un pont aérien pour transporter au moins 1600 personnes et au moins 90 tonnes de bagages. Les avions disponibles sont de deux types : 12 du type A et 9 du type B.

À pleine charge, un avion de type A peut transporter 200 personnes et 6 tonnes de bagages et un avion B peut transporter 100 personnes et 15 tonnes de bagages.

On note x le nombre d'avions de type A et y le nombre d'avions de type B que l'on va utiliser afin de réaliser le pont aérien.

1. Justifier que les couples $(x; y)$ permettant de réaliser le pont aérien sont les solutions du système :

$$(\Sigma) \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 16 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$$

$x \in \mathbb{N}$, car le nombre d'avions de type A est un entier positif compris entre 0 et 12 inclus.

$y \in \mathbb{N}$, car le nombre d'avions de type B est un entier positif compris entre 0 et 9 inclus.

$200x + 100y \geq 1600$, c'est-à-dire $2x + y \geq 16$

$6x + 15y \geq 90$, c'est-à-dire $2x + 5y \geq 30$

2. Donner trois couples solutions du système.

$(10; 2)$, $(10; 3)$ et $(10; 4)$

On va voir dans la suite comment trouver toutes les solutions du système (Σ) .

3. Interprétation graphique d'une inéquation linéaire à deux inconnues

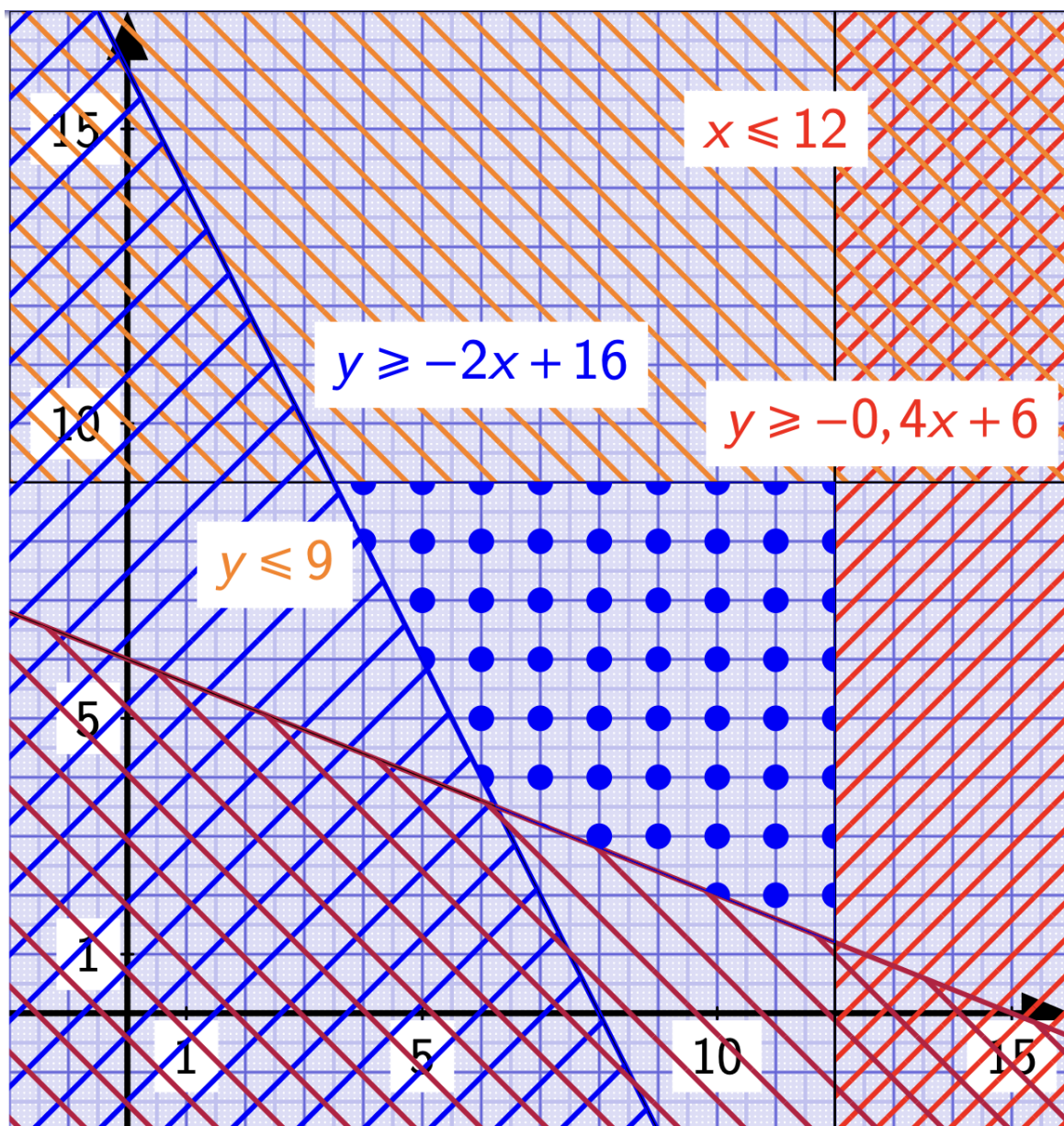
Suite à l'exemple :

Soit un repère du plan $(O; I, J)$.

1. Tracer la droite (d_1) d'équation $y = -2x + 16$ sur le graphique ci-dessous.

Cette droite partage le plan en deux demi-plans de frontière (d_1) .

Pour chacun de ces demi-plans, donner les coordonnées de deux points qu'il contient. Les points de coordonnées () et () appartiennent au demi-plan ... et les points de coordonnées () et () appartiennent au demi-plan ...



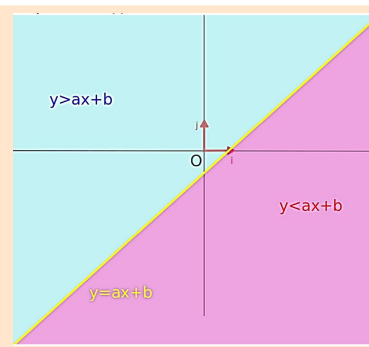
2. On considère maintenant l'ensemble (S_1) des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'inéquation linéaire à deux inconnues : $y \geq -2x + 16$.

L'ensemble (S_1) est l'un des deux demi-plans définis dans la question précédente : hachurer au crayon papier le demi-plan qui n'est pas solution et donner les coordonnées de trois points de l'ensemble (S_1) . Les points de coordonnées () et () appartiennent au demi-plan ... et les points de coordonnées () et () appartiennent au demi-plan ...

Plus généralement, on retiendra :

■ **DÉFINITION** : Cas de deux demi-plans ouverts

Soient $(O ; I, J)$ un repère du plan et a et b deux nombres réels.
On considère la droite (d) d'équation $y = ax + b$.
L'ensemble (S) des points du plan de coordonnées $(x ; y)$ vérifiant l'inéquation $y \geq ax + b$ est l'un des deux demi-plans de frontière (d) .
L'autre demi-plan est celui contenant les points de coordonnées $(x ; y)$ vérifiant : $y \leq ax + b$.



Remarque : Ici, la droite appartient aux deux demi-plans. On détermine les inéquations correspondantes en choisissant un point et en vérifiant avec ses coordonnées.

Suite à l'exemple :

3. Tracer la droite (d_2) d'équation $y = -0,4x + 6$ sur le même graphique que précédemment.
En déduire la représentation graphique de l'ensemble (S_2) des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'inéquation linéaire à deux inconnues : $y \geq -0,4x + 6$ (hachurer celui des deux demi-plans qui n'est pas l'ensemble (S_2))
4. En hachurant les points dont les coordonnées ne sont pas solutions, compléter le graphique avec les solutions des inéquations $0 \leq x \leq 12$ et $0 \leq y \leq 9$.

5. Vérifier que le système (Σ) est équivalent au système
$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ y \geq -2x + 16 \\ y \geq -0,4x + 6 \end{cases} \quad \text{et déduire à l'aide du}$$

graphique que ce système admet exactement 56 couples $(x; y)$ solutions.

Montrer que le couple $(10; 5)$ est solution et interpréter ce couple solution dans le contexte de l'exemple.

$(10; 2)$

■ **VOCABULAIRE** :

La région du plan (ici un quadrilatère) contenant les points de coordonnées $(x ; y)$ solutions du système Σ s'appelle le **polygone des contraintes**



En allemand...

- le polygone des contraintes : das Planungsvieleck

4. Optimisation linéaire

On sait aussi que la location d'un avion de type A coûte 4 millions d'euros et que la location d'un avion de type B coûte 1 million d'euros. On souhaite trouver, parmi les 56 solutions possibles, celle qui est la plus économique.

1. Combien coûte la location de x avions de type A et de y avions de type B?

$$4x + y$$

2. Représenter sur le graphique la droite d'équation : $4x + y = 8$.

En déduire s'il est possible de réaliser le pont aérien pour un budget de 8 millions d'euros.

C'est impossible, on se situe à l'extérieur de la zone pas pour un budget de 8 millions d'euros.

3. Reprendre la question précédente avec un budget de 38 millions d'euros.

$$4x + y = 38.$$

Une solution qui est (8 ; 6)

4. À une dépense de k millions d'euros, on associe la droite (Δ_k) d'équation : $4x + y = k$.

- (a) Prouver que toutes les droites (Δ_k) sont parallèles entre elles.

Elles ont toutes le même coefficient directeur.

- (b) Comment se lit graphiquement le nombre k , coût exprimé en millions d'euros de la location de x avions de type A et de y avions de type B?

Le nombre k est l'ordonnée à l'origine, mais c'est aussi le quadruple de x .

- (c) En déduire une méthode graphique pour minimiser la dépense k et déterminer cette dépense minimale ainsi que le nombre d'avions de chaque sorte correspondant.

On fait glisser la droite parallèlement à elle-même en cherchant à minimiser k (donc on minimise l'ordonnée à l'origine, ou l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des abscisses) jusqu'à arriver à un nœud du quadrillage dans la zone non-hachurée. Ici, on arrive au point de coordonnées (4 ; 8).

■ VOCABULAIRE :

On peut définir la fonction objectif f , fonction de deux variables qui à un couple $(x; y)$ correspondant à la location de x avions A et y avions B associe la dépense engendrée.

Suite à l'exemple :

Autrement dit $f(x; y) = 4x + y$

Le problème posé dans la question 4.c) est donc de **minimiser la fonction objectif f sous la contrainte que le couple $(x; y)$ vérifie le système (Σ) .**



En allemand...

- la fonction objectif : die Zielfunktion