

Dénombrement

1. p -listes (ou p -uplet)

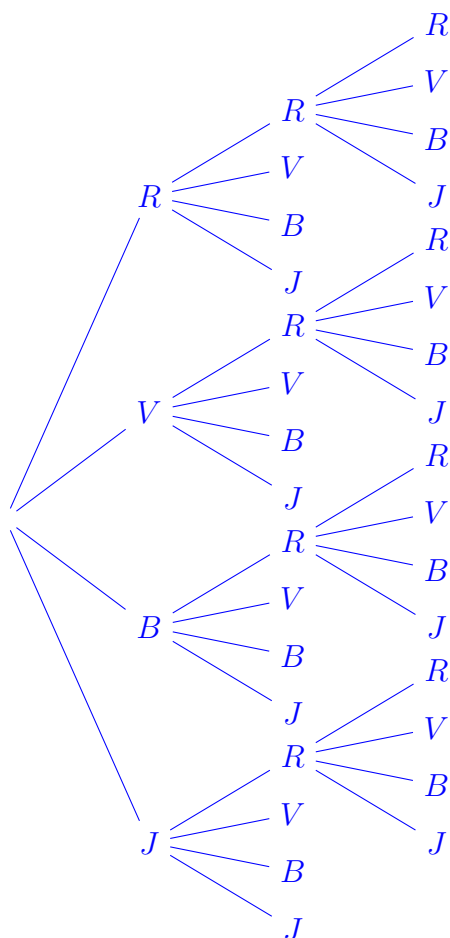
Exemple :

Une urne contient quatre boules : une verte V , une bleue B , une rouge R et une jaune J . L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard successivement trois boules (c'est-à-dire en tenant compte de l'ordre de sortie des boules) avec remise de la boule tirée à chaque fois dans l'urne (donc avec répétition possible), en notant à chaque fois la couleur de la boule tirée.

Les issues sont donc des triplets, des listes ordonnées, avec répétition possible de trois boules. Par exemple

$(J ; B ; R)$ ou $(R ; B ; B)$

sont des éléments de Ω . On cherche à déterminer le nombre d'éléments de Ω . Pour cela, on peut utiliser un arbre :



On obtient $\text{card}(\Omega) = 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.

■ DÉFINITION :

Une liste ordonnée avec répétition possible de p éléments choisis parmi les n éléments d'un ensemble E s'appelle une **p -liste** (ou un **p -uplet**) d'éléments de E .

Remarque :

- Un 2-uplet est appelé un **couple**.
- Un 3-uplet est appelé un **triplet**.

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Le nombre de p -listes distinctes prises dans un ensemble E à n éléments est : n^p

Exemple :

On lance 10 fois une pièce équilibrée. Le nombre de mots possibles à 10 lettres, formés avec les lettres P et F , est $2^{10} = 1024$.

Remarque :

 On dit que le principe est **multiplicatif**.

Exemple :

En effet, si on considère deux lancers successifs d'un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Le nombre de couples de résultats de ces lancers est 6×6 , car il y a 6 possibilités pour le premier lancer et 6 possibilités pour le deuxième. On obtient 6^2 , c'est-à-dire 36, ce qui revient à prendre 2 éléments (les deux résultats) dans un ensemble de 6 chiffres (les nombres inscrits sur les faces du dé).

Exemple :

Le code d'accès aux services d'une banque à distance s'effectue par un identifiant de 8 chiffres choisis entre 0 et 9, suivi, si l'identifiant est correct, d'un second code à 8 chiffres choisis entre 0 et 9. Ces chiffres peuvent être répétés.

Combien y a-t-il de codes d'accès possibles globalement ?

On prend d'abord 8 chiffres dans un ensemble de 10 chiffres, puis, si l'identifiant est correct, on prend à nouveau 8 chiffres dans un ensemble de 10 chiffres. Il y a donc

$$10^8 + 10^8 = 2 \times 10^8 = 200\,000\,000$$

codes possibles.

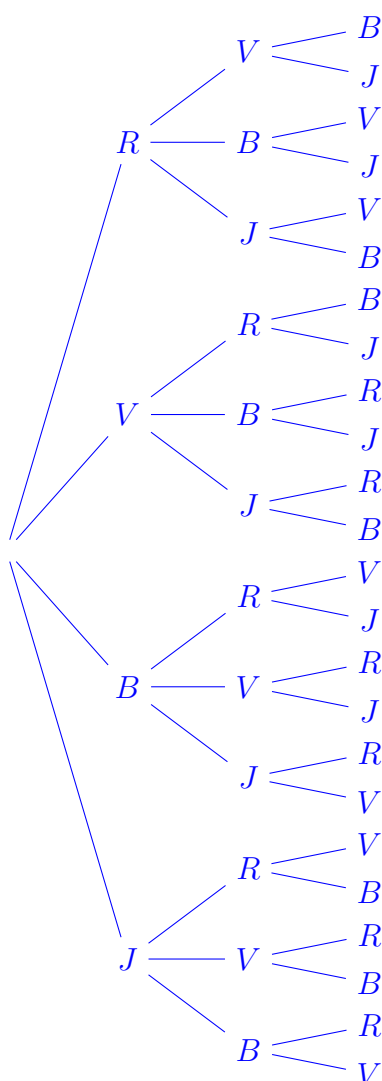
2. Arrangements

Exemple :

Une urne contient quatre boules : une verte V , une bleue B , une rouge R et une jaune J . L'expérience aléatoire consiste à en tirer successivement trois (c'est-à-dire en tenant compte de leur ordre de sortie) sans remise de la boule tirée (donc sans répétition possible), en notant à chaque fois la couleur de la boule tirée.

Les issues sont donc des triplets, des listes ordonnées, sans répétition possible de trois boules.

Pour dénombrer les éléments de Ω , un arbre est utile :



Cet arbre permet de montrer que

$$\text{card}(\Omega) = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

■ DÉFINITION :

Une liste ordonnée sans répétition de p éléments choisis parmi n éléments d'un ensemble E s'appelle un **arrangement** de p éléments de E .

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Le nombre d'arrangements distincts de p éléments pris dans un ensemble E à n éléments, noté A_n^p , est :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)$$

Remarque : A_n^p s'écrit avec p facteurs.

Exemple :

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

■ DÉFINITION :

Une liste ordonnée sans répétition de n éléments choisis parmi n éléments d'un ensemble E s'appelle une **permutation** de n éléments de E .

■ DÉFINITION :

Le nombre de permutations de n éléments est :

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots \times 2 \times 1$$

où $n!$ se lit **factorielle** n .

Remarque : Par convention : $0! = 1$.

Remarque : En observant que :

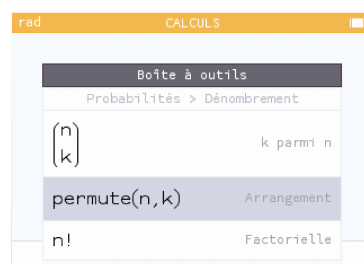
$$n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)(n-p) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-p)(n-p-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$\text{on peut écrire : } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

À la **calculatrice** : Dans Calculs, en cliquant sur la boîte à outils , puis Probabilités, puis Dénombrement, on peut choisir « permute(n, k) » :



3. Combinaisons

Exemple :

Une urne contient quatre boules : une verte V , une bleue B , une rouge R et une jaune J . L'expérience aléatoire consiste à tirer simultanément trois boules (c'est-à-dire sans ordre ni répétition) en notant les trois couleurs obtenues.

Les issues sont donc des listes non ordonnées, sans répétition possible de trois boules : par exemple $\{R ; B ; V\}$ est une issue, c'est la même que $\{R ; V ; B\}$ ou $\{V ; R ; B\}$ ou $\{V ; B ; R\}$ ou $\{B ; V ; R\}$ ou encore $\{B ; R ; V\}$.

■ DÉFINITION :

Une liste non ordonnée sans répétition possible de p éléments choisis parmi n éléments d'un ensemble E s'appelle une **combinaison** des p éléments de E .

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Le nombre de combinaisons distinctes de p éléments pris dans un ensemble E à n éléments, noté $\binom{n}{p}$ est :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}$$

Remarque : utile pour les calculs : $\binom{n}{p}$ s'écrit avec p facteurs au numérateur et p facteurs au dénominateur :

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}$$

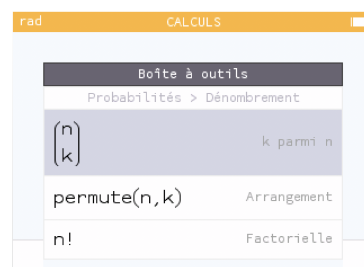
Exemple :

Calculer à la main puis avec la calculatrice : $\binom{7}{4}$.

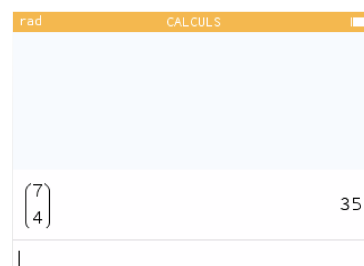
À la main :

$$\begin{aligned} \binom{7}{4} &= \frac{A_7^4}{4!} \\ &= \frac{1}{4!} \times \frac{7!}{(7-4)!} \\ &= \frac{1}{4!} \times \frac{7!}{3!} \\ &= \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3} \\ &= \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{4 \times 3 \times 2} \\ &= 5 \times 7 \\ &= 35 \end{aligned}$$

À la calculatrice : Dans Calculs, en cliquant sur la boîte à outils , puis Probabilités, puis Dénombrement, on peut choisir « $\binom{n}{k}$ » :



On obtient le résultat attendu :



Remarque : Le nombre de combinaisons de p éléments pris dans un ensemble E à n éléments est noté $\binom{n}{p}$ et se lit « p parmi n » : il était jadis noté : C_n^p en cohérence avec la notation A_n^p .

Remarque : On a aussi $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$

En résumé : nombre de façons de choisir p objets parmi n objets

	avec remise	sans remise
avec remise	n^p	A_n^p
sans remise		$\binom{n}{p}$



En allemand...

- A_n^n ist eine Permutation.
- A_n^p ist eine Variation
- $\binom{n}{k}$ ist der Binomialkoeffizient.

Remarque : Il est temps de faire le lien avec la loi binomiale : dans cette loi, le symbole $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de chemins comportant k succès en n tentatives. Or déterminer un tel chemin, revient à placer k lettres parmi n places disponibles, c'est-à-dire à choisir k numéros de places dans l'ensemble des numéros de place possibles $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$: c'est une liste non ordonnée et sans répétition de k entiers pris parmi n . Tout est cohérent !

4. Le retour de la loi binomiale

Soit p un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.

■ DÉFINITION :

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire ayant deux issues : l'une appelée « succès », de probabilité p , et l'autre « échec », de probabilité $q = 1 - p$.

■ DÉFINITION :

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'issue est un succès, et 0 si c'est un échec. Sa loi de probabilité est appelée une **loi de Bernoulli** c'est-à-dire

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

■ DÉFINITION :

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

■ PROPRIÉTÉ :

Si une variable aléatoire X **suit la loi de Bernoulli de paramètre p** , alors :

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1 - p) = pq$$

■ DÉFINITION :

Soit n un entier naturel non nul. Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est l'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre p .

■ DÉFINITION :

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus. Sa loi de probabilité est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p . On dit que X **suit une loi binomiale de paramètres n et p** notée : $\mathcal{B}(n ; p)$.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$. Alors

- $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n\}$

- Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

- $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p) = npq$

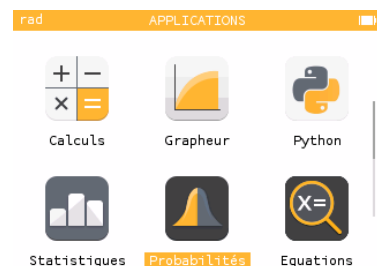
Exemple :

On lance un dé dix fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir un 5 exactement trois fois ?
L'expérience aléatoire est un schéma de Bernoulli, de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$ (probabilité du succès « obtenir un 5 »). Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus (le nombre de 5), alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10 ; \frac{1}{6}\right)$. On applique alors la formule :

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^7 \approx 0,155$$

Avec la calculatrice :

Pour utiliser la calculatrice, on clique d'abord sur Probabilités



puis Binomiale



et on saisit les paramètres de la loi binomiale de l'exercice (ici $n = 10$ et $p = \frac{1}{6} \approx 0,166667$)



On peut ensuite choisir si l'on veut calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$ ou encore $P(X \geq k)$ (et même $P(k \leq X \leq k')$)

