

Fiche : méthodes d'intégration

Les différentes techniques d'intégration sont principalement :

- l'intégration directe (en consultant la table des primitives) ;
- l'intégration par partie ;
- le changement de variable ;
- la décomposition en éléments simples ;
- la linéarisation ;
- la méthode par identification.

Il existe cependant d'autres techniques, plus rares, comme la combinaison linéaire de deux intégrales, l'utilisation des nombres complexes, l'approche numérique...

Pour chaque type de fonction à intégrer, il y a une technique à connaître, et à appliquer. Les douze cas les plus fréquents sont répertoriés dans le tableau ci-dessous. Dans celui-ci, on a $(x, a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

Cas	Type de fonction à intégrer	Exemple	Technique d'intégration
1	Fonction usuelle	$\sin(x), \frac{u'}{u}, \dots$	Intégration directe
2	Monôme quelconque	x^n	Intégration directe
3	Élément simple de première espèce	$\frac{1}{(x-a)^n}$	Intégration directe
4	Fonction composée	$f \circ g(x) = f(g(x))$	Changement de variable : $u = g(x)$
5	Produit de deux fonctions dont une primitive est connue	$e^x \sin(x)$ $x^3 \ln(x)$	Intégration par parties $\int u'v = [uv] - \int uv'$
6	Produit d'un polynôme $P(x)$ et d'une exponentielle	$P(x)e^{ax+b}$ $\deg(P) = \deg(Q)$	Méthode par identification des coefficients : $\int P(x)e^{ax+b} = Q(x)e^{ax+b}$
7	Inverse d'un polynôme de degré 2 (décomposition si $\Delta \geq 0$)	$\frac{1}{x^2 - 2x - 3}$	Si $\Delta < 0$: changement de variable, puis reconnaissance de la dérivée de arctan.
8	Inverse de la racine carrée d'un polynôme de degré 2	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$	Changement de variable, puis reconnaissance de la dérivée de arcsin
9	Élément simple de seconde espèce	$\frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n}$	Écriture du polynôme sous sa forme canonique, puis changement de variable
10	Fonction rationnelle en x	$\frac{-x^3 + x - 1}{x^5 + x^2 + 1}$	Décomposition en éléments simples
11	Fraction rationnelle	$\frac{\sin^4(x)}{\sin(x) + \cos^3(x)}$	Changement de variable, puis Décomposition en éléments simples.
12	Produit de $\sin^n(x)$ et $\cos^m(x)$	$\sin^4(x) \cos^3(x)$	Changement de variable ou linéarisation selon la parité des exposants

Remarques :

- On peut passer du cas 3 au cas 2 en posant : $u = x - a$.
- La décomposition en éléments simples permet de passer du cas 10 aux cas 3 et 9.
- Les règles de Bioche [*Charles Bioche, 1859-1949*] indiquent les changements de variables à effectuer pour passer du cas 11 au cas 10. Il y a quatre cas possibles : $u = \cos(x)$, $u = \sin(x)$, $u = \tan(x)$ ou, si aucun des autres n'est possible, $u = \tan(x/2)$.
- Pour les cas 7 et 8, l'écriture du polynôme sous sa forme canonique oriente vers le bon changement de variable, qui permet d'obtenir la dérivée d'une fonction trigonométrique réciproque.
- Dans le cas 7, on tombe sur la dérivée de $\frac{\arctan\left(\frac{x+b}{a}\right)}{a}$.
- Dans le cas 8, on tombe sur la dérivée de arcsin, arsinh ou argcosh.