
Colle PCSI 26 novembre 2024

Exercice 1 - Calculs de limite d'une intégrale par décomposition en éléments simples

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b , à déterminer, tels que, pour tout réel $t > 0$, $\frac{1}{t(t^7 + 1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt^6}{t^7 + 1}$
2. Calculer pour tout $k > 1$, $I_k = \int_1^k \frac{1}{t + t^8} dt$.
3. Calculer la limite de I_k lorsque $k \rightarrow +\infty$.

Correction :

1. On identifie les numérateurs des deux expressions et on obtient : pour tout réel positif t , $1 = at^7 + a + bt^7$, donc $a + b = 0$ et $a = 1$, donc enfin $a = 1$ et $b = -1$.
2. On cherche une primitive F de la fonction f vérifiant $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{t^6}{t^7 + 1}$. On trouve

$$F(t) = \ln |t| - \frac{1}{7} \ln |t^7 + 1|$$

Donc

$$I_k = \ln k - \frac{1}{7} \ln (k^7 + 1) + \frac{1}{7} \ln 2$$

3. On peut écrire I_k sous la forme $I_k = \frac{1}{7} \ln \left(\frac{k^7}{k^7 + 1} \right) + \frac{1}{7} \ln 2$.

Lorsque k tend vers $+\infty$, $\frac{k^7}{k^7 + 1}$ tend vers 1, donc, comme $\ln \left(\frac{k^7}{k^7 + 1} \right)$ tend vers 0, on peut affirmer que I_k tend vers $\frac{1}{7} \ln 2$ quand k tend vers $+\infty$.

Exercice 2 - Deux méthodes de calculs d'une intégrale

Le but de cet exercice est de calculer deux intégrales très proches de deux manières différentes. Les deux parties sont donc indépendantes.

Partie 1 :

1. Montrer l'existence et déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout x non nul,

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

2. En déduire $A = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx$ et $B = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x \ln(x)}{(x^2 + 1)^2} dx$

Partie 2 :

Soit a un réel. Calculer $I = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{x \ln(x)}{(x^2 + 1)^2} dx$

Correction :

Partie 1 :

1. $a = 1$, $b = -1$ et $c = -1$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

2. Ainsi

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} dx \\
&= \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= -\frac{1}{2} \ln 2 - \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{4} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \ln 2 + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{2} \right)
\end{aligned}$$

Pour B , on va effectuer une intégration par parties en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$. Alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(x^2 + 1)}$

$$\begin{aligned}
B &= \left[-\frac{\ln x}{2(x^2 + 1)} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{2} A \\
&= \frac{\ln \left(\frac{1}{2} \right)}{2 \times \frac{5}{2}} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{5}{2} \right) \\
&= \frac{-2 \ln 2}{5} + \frac{1}{4} (\ln 5 - \ln 2) \\
&= \frac{\ln 5}{4} - \ln(2) \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{\ln 5}{4} - \frac{13}{20} \ln 2
\end{aligned}$$

Partie B :

Pour I effectuons le changement de variable $y = \frac{1}{x}$. Ainsi $x = \frac{1}{y}$. Pour les bornes de l'intégrale, quand $x = \frac{1}{a}$, alors $y = a$ et quand $x = 1$, alors $y = 1$. Puis $dx = d\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{dy}{y^2}$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{x \ln(x)}{(x^2 + 1)^2} dx \\
&= \int_a^1 \frac{\frac{1}{y} \ln \left(\frac{1}{y} \right)}{\left(\left(\frac{1}{y} \right)^2 + 1 \right)^2} \times \left(-\frac{1}{y^2} \right) dy \\
&= \int_a^1 \frac{-\ln(y)}{y \left(\frac{1}{y^2} + 1 \right)^2} \times \left(-\frac{1}{y^2} \right) dy \\
&= \int_a^1 \frac{\ln(y)}{y \left(\frac{y^2 + 1}{y^2} \right)^2} \times \left(\frac{1}{y^2} \right) dy \\
&= \int_a^1 \frac{y^4 \ln(y)}{y (y^2 + 1)^2} \times \left(\frac{1}{y^2} \right) dy \\
&= \int_a^1 \frac{y^3 \ln(y)}{(y^2 + 1)^2} \times \left(\frac{1}{y^2} \right) dy \\
&= \int_a^1 \frac{y \ln(y)}{(y^2 + 1)^2} dy
\end{aligned}$$

On reconnaît à droite de l'égalité $-I$. On obtient donc $I = -I$, ou encore $I = 0$, et donc

$$\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{x \ln(x)}{(x^2 + 1)^2} dx = 0$$

Exercice 3 - Intégrales et changements de variables

1. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout réel u différent de $\frac{1}{2}$,

$$f(u) = \frac{u^2 - 1}{2u - 1} = au + b + \frac{c}{2u - 1}$$

2. Calculer $\int_{-1}^0 \frac{x^2 - 1}{2x - 1} dx$

3. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{\cos^3(x)}{1 - 2\sin x} dx$

4. Calculer $\int_{-1}^0 t \ln(1 - 2t) dt$

Correction :

1. Par identification des numérateurs des deux expressions, on obtient $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$ et $c = -\frac{3}{4}$
2. Une primitive de f telle que

$$f(u) = \frac{u^2 - 1}{2u - 1} = \frac{u}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2u - 1)}$$

est F telle que

$$F(u) = \frac{u^2}{4} + \frac{u}{4} - \frac{3}{8} \ln |2u - 1|$$

On a alors $I = \frac{3}{8} \ln 3$.

3. On peut écrire $\cos^3(x) = \cos(x)(1 - \sin^2(x))$. Ainsi

$$\frac{\cos^3(x)}{1 - 2\sin(x)} = \left(\frac{\sin^2 x - 1}{2\sin x - 1} \right) \cos(x)$$

On remarque que, si on pose $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$, alors

$\frac{\cos^3}{1 - 2\sin} = f(\sin) \times \cos$, dont une primitive est $F(\sin)$.
D'où

$$J = \frac{3}{8} \ln 2 + \frac{1}{16}$$

4. On peut faire une intégration par parties, en dérivant l'expression en $\ln$ et "en intégrant t ". Une astuce pour arriver plus vite au résultat consiste à choisir U avec $U(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$ comme primitive de u avec $u(t) = t$, et ainsi retrouver l'expression de I . On a alors $K = -\frac{3}{8} \ln 3$

Exercice 4 - IPP et changement de variable

En utilisant un changement de variable judicieux, calculer

$$\int_0^4 \sqrt{x} \cos(\pi\sqrt{x}) \, dx$$

Correction :

On pose $t = \sqrt{x}$. Si $x = 0$, alors $t = 0$ et si $x = 4$, alors $t = 2$. Puis $dt = \frac{dx}{2t}$, et donc $dx = 2t dt$. D'où

$$\int_0^4 \sqrt{x} \cos(\pi\sqrt{x}) \, dx = \int_0^2 t \cos(\pi t) \times 2t dt$$

On cherche donc maintenant à calculer

$$\int_0^2 2t^2 \cos(\pi t) \, dt$$

On effectue une intégration par parties en dérivant $t \mapsto 2t^2$ et en intégrant $t \mapsto \cos(\pi t)$. Il vient

$$\begin{aligned} \int_0^2 2t^2 \cos(\pi t) \, dt &= \left[\frac{2}{\pi} t^2 \sin(\pi t) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{4}{\pi} t \sin(\pi t) \, dt \\ &= 0 - \frac{4}{\pi} \int_0^2 t \sin(\pi t) \, dt \end{aligned}$$

Pour calculer $\int_0^2 t \sin(\pi t) \, dt$, on effectue à nouveau une intégration par parties en dérivant $t \mapsto t$ et en intégrant $t \mapsto \sin(\pi t)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^2 t \sin(\pi t) \, dt &= \left[-\frac{1}{\pi} t \cos(\pi t) \right]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{\pi} \cos(\pi t) \, dt \\ &= -\frac{2}{\pi} + 0 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi t) \right]_0^2 \\ &= -\frac{2}{\pi} + 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} 2t^2 \cos(t) \, dt &= -\frac{4}{\pi} \times \left(-\frac{2}{\pi} \right) \\ &= \frac{8}{\pi} \end{aligned}$$

Exercice 5 - Autour de arctan

La fonction tangente, définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, est bijective, et sa fonction réciproque est notée arctan.

1. Que vaut $\cos(\arctan(x))$ pour tout réel x ?

2. Montrer que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2} dt = x$$

3. Par ailleurs, on montre que arctan est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Déterminer, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. Déterminer une primitive de la fonction arctan.

Correction :

1. On s'intéresse à $y = \cos(\arctan(x))$, et on note $a = \arctan(x)$.

a est donc le nombre réel tel que $x = \tan a$.

Ainsi $x = \tan a$ et $y = \cos a$. Or, $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$. Donc

$$1 + x^2 = \frac{1}{y^2}.$$

$$\text{Donc } y^2 = \frac{1}{1+x^2}, \text{ c'est-à-dire } \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Or, $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\cos(x) \geq 0$ sur cet intervalle,

$$\text{d'où } y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Notons h la fonction définie par

$$h(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

Notons

$$f(x) = h(\tan(x)) = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2} dt$$

f est la composée de la fonction h et de la fonction $\tan$, donc f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, pour tout $x \in I$, on a

$$f'(x) = h'(\tan x) \times \tan'(x)$$

Or, $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et donc

$$f'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} \times (1+\tan^2(x)) = 1$$

Donc $f(x) = x + c$, avec c une constante réelle. Or, $0 + c = f(0) = h(\tan 0) = 0$. Donc $c = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$h(\tan x) = x$$

ce que l'on voulait démontrer.

3. Posons $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. On dérive f sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Ainsi f est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Pour $x = 1$, on a $\tan(1) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$. Donc $f(x) = \frac{\pi}{2}$ sur $]0, +\infty[$.

Pour $x = -1$, on a $\tan(-1) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4}$. Donc $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ sur $]-\infty, 0[$.

4. Pour déterminer une primitive de $\arctan$, on note $\arctan = 1 \times \arctan$, et on intègre par parties, en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \arctan(x)$. Alors $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$. D'après la formule précédente

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= \int 1 \times \arctan(x) dx \\ &= [x \arctan(x)] - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= [x \arctan(x)] - \int \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= [x \arctan(x)] - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] \text{ car } 1+x^2 > 0 \end{aligned}$$

Donc une primitive de la fonction $\arctan$ est la fonction

$$x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

Exercice 6 - Recherche de primitive

Pour tout réel x différent de 1, on pose

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 5}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

1. Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que $f(x)$ peut aussi s'écrire

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx}{x^2+1}$$

2. En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.

Correction :

1. On cherche à déterminer a , b et c tels que

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 5}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx}{x^2+1}$$

Il s'agit d'une méthode appelée *décomposition en éléments simples*.

On va raisonner par identification :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx}{x^2+1} &= \frac{a(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)} + \frac{b(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)} + \frac{cx(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ &= \frac{ax^3 + ax - ax^2 - a + bx^2 + b + cx^3 - 2cx^2 + cx}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ &= \frac{(a+c)x^3 + (-a+b-2c)x^2 + (a+c)x + (-a+b)}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{aligned}$$

Par identification, il vient le système

$$\begin{cases} a + c = 1 & (L_1) \\ -a + b - 2c = 1 & (L_2) \\ a + c = 1 & (L_4) \\ -a + b = 5 & (L_3) \end{cases}$$

On remarque que les équations (L_1) (L_4) sont identiques. On a donc le système et les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} a + c = 1 & (L_1) \\ -a + b - 2c = 1 & (L_2) \\ -a + b = 5 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} a + c = 1 & (L_1) \\ -a + b - 2c = 1 & (L_2) \\ 2c = 4 & (L_2 - L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = 2 \\ a = 1 - c = -1 \\ b = 5 + a = 4 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{2x}{x^2+1}.$$

2. On cherche la primitive qui s'annule en 0. Cherchons l'ensemble des primitives :

$$F(x) = -\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + \ln|x^2+1| + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$, donc

$$F(x) = -\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + \ln(x^2+1), \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

On veut $F(0) = 0$, d'où $-\ln 1 + 4 + \ln 1 + c = 0$, et donc $c = -4$.

Ainsi la primitive cherchée est

$$F : x \mapsto -\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + \ln(x^2+1) - 4$$

Exercice 7 - Fonction intégrale

1. Déterminer pour quelles valeurs de x , $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ existe
2. Calculer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 1.
3. Calculer la dérivée de F .
4. Déterminer la limite de $F'(x)$ quand x tend vers 1.

Correction :

1. Notons $f : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$.
 - Pour $x < 0$, on a $t < 0$, et donc la fonction f n'est pas définie.
 - Pour $x = 0$, l'intégrale n'a pas de sens.
 - Pour $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$, et donc $[x^2, x] \subset]0, 1[$.
Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2, x]$, et donc $F(x)$ existe.
 - Pour $x = 1$, l'intégrale n'a pas de sens.
 - Pour $x > 1$, on a $x < x^2$, et donc $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$.
Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x, x^2]$, et donc $F(x)$ existe.

Donc F est définie sur $\mathcal{D} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2.
 - On s'intéresse d'abord à la limite à droite quand x tend vers 1. Soit $t \in [x, x^2]$. On a $1 < x \leq t \leq x^2$, et donc $t > 0$. Ainsi $\ln(t) > 0$.

On en déduit que $\frac{1}{t \ln(t)} > 0$.

En multipliant chacun des membres de l'équation $x \leq t \leq x^2$ par $\frac{1}{t \ln(t)} > 0$, on obtient

$$x \frac{1}{t \ln(t)} \leq t \frac{1}{t \ln(t)} \leq x^2 \frac{1}{t \ln(t)}$$

Par croissance de l'intégrale, on peut affirmer que

$$\int_x^{x^2} x \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \int_x^{x^2} t \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \int_x^{x^2} x^2 \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

c'est-à-dire, par définition de f et par linéarité de l'intégrale

$$x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq f(x) \leq x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt \quad (*)$$

Il faut donc calculer $I = \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$. Pour $x \in [1, +\infty[$, la fonction $\ln$ est strictement positive.

$$I = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \times \frac{1}{\ln(t)} dt = \int_x^{x^2} \frac{\ln'(t)}{\ln(t)} dt = [\ln(\ln(t))]_x^{x^2} = \ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln(x))$$

Par les propriétés de la fonction $\ln$, on obtient :

$$I = \ln(2 \ln(x)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2) + \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(x)) = \ln 2$$

D'où

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt = \ln 2 \quad (I)$$

On réinjecte cette valeur dans (*), et on obtient

$$x \ln 2 \leq f(x) \leq x^2 \ln 2$$

On a $\lim_{x \rightarrow 1^+} x \ln 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 \ln 2 = \ln 2$. Donc, d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1^+ .

- On s'intéresse ensuite à la limite à gauche quand x tend vers 1, i.e. la limite en 1^- . Puisque $x \in]0, 1[$, on a $x^2 < x$. Soit $t \in [x^2, x]$. On a $0 < x^2 \leq t \leq x < 1$, et donc $t > 0$. Ainsi $\ln(t) < 0$. On en déduit que $\frac{1}{t \ln(t)} < 0$.

En multipliant chacun des membres de l'équation $x^2 \leq t \leq x$ par $\frac{1}{t \ln(t)} < 0$, on obtient

$$x^2 \frac{1}{t \ln(t)} \geq t \frac{1}{t \ln(t)} \geq x \frac{1}{t \ln(t)}$$

Par croissance de l'intégrale, on peut affirmer que

$$\int_{x^2}^x x^2 \frac{1}{t \ln(t)} dt \geq \int_{x^2}^x t \frac{1}{t \ln(t)} dt \geq \int_{x^2}^x x \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

c'est-à-dire, par linéarité de l'intégrale

$$x^2 \int_{x^2}^x \frac{1}{t \ln(t)} dt \geq \int_{x^2}^x t \frac{1}{t \ln(t)} dt \geq x \int_{x^2}^x \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

et en inversant les bornes, on a

$$-x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt \geq -f(x) \geq -x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

D'où, en multipliant par -1 chaque membre de cette équation :

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq f(x) \leq x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

D'après (I), cette double inéquation devient

$$x^2 \ln 2 \leq f(x) \leq x \ln 2$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 \ln 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} x \ln 2 = \ln 2$. Donc, d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1^- .

Donc, on peut dire que la limite de $F(x)$ quand x tend vers 1 est $\ln 2$.

3. On a $f'(t) = \frac{1}{\ln t}$. Notons Φ une primitive de f .

Alors $F(x) = \Phi(x^2) - \Phi(x)$, avec $\Phi' = f$.

Donc $F'(x) = 2x\Phi'(x^2) - \Phi'(x)$. Donc

$$F'(x) = 2x \times \frac{1}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2x}{2 \ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

4. On sait que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ (c'est la limite d'un taux de variation)

D'où, par limite d'inverse, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$.

On en conclut que la limite de $F'(x)$ quand x tend vers 1 est 1.