

Changement de variable dans une intégrale

1. Introduction

Jusqu'à présent, pour calculer une intégrale, nous cherchions une **primitive** de la fonction à intégrer. Mais certaines intégrales résistent : on ne « voit » pas de primitive évidente. Par exemple :

- Comment calculer $\int_0^1 x e^{x^2} dx$, alors que $x \mapsto e^{x^2}$ n'a pas de primitive simple ?
- Comment calculer l'aire $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$?

L'idée fondamentale du **changement de variable** est de **remplacer la variable d'intégration** par une nouvelle variable, mieux choisie, afin de transformer une intégrale compliquée en une intégrale que l'on sait calculer.

Exemple : Motivation

Vous savez déjà calculer $\int_a^b u'(x) e^{u(x)} dx = [e^{u(x)}]_a^b$,
ou encore $\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)} dx = [\ln |u(x)|]_a^b$.

Ces formules ne sont rien d'autre que des changements de variable « déguisés ».

2. Le point de départ : dériver une fonction composée

Tout repose sur une formule connue. Soit u une fonction dérivable et F une fonction dérivable. La dérivée de la composée $F \circ u$ est :

$$(F \circ u)'(x) = u'(x) \times F'(u(x))$$

Lisons cette égalité **à l'envers**, c'est-à-dire en termes de primitives. Si F est une primitive de f (donc $F' = f$), alors :

$$(F \circ u)'(x) = u'(x) \times f(u(x))$$

Autrement dit, $x \mapsto F(u(x))$ est **une primitive** de la fonction $x \mapsto u'(x) f(u(x))$. On en déduit immédiatement :

■ **PROPRIÉTÉ :** Forme « reconnue »

Soit f une fonction continue admettant une primitive F , et u une fonction dérivable. Alors :

$$\int_a^b u'(x) f(u(x)) dx = [F(u(x))]_a^b$$

Remarque : Toute la difficulté pratique consiste à **reconnaître** la structure $u'(x) \times f(u(x))$ dans l'intégrale. Le changement de variable est précisément l'outil qui rend cette reconnaissance systématique.

3. Le théorème du changement de variable

■ **THÉORÈME :** Changement de variable

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I . Soit u une fonction de **classe $\mathcal{C}^1$** sur $[a; b]$ (c'est-à-dire dérivable, de dérivée continue), dont toutes les valeurs appartiennent à I . Alors :

$$\int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$$

Remarques :

1. On a simplement posé $t = u(x)$: la variable de gauche est x , celle de droite est t .
2. Les **bornes changent** : à gauche on intègre de a à b en x , à droite de $u(a)$ à $u(b)$ en t .
3. Le facteur $u'(x)$ « disparaît » : il est absorbé par le passage de dx à dt (voir ci-dessous).

A. La notation différentielle : une mécanique pratique

En pratique, on n'écrit pas tout le théorème à chaque fois. On utilise une notation très commode, héritée de Leibniz. Lorsqu'on pose :

$$t = u(x)$$

on écrit la relation entre les « petites variations » sous la forme :

$$dt = u'(x) dx$$

Remarque : Cette écriture $dt = u'(x) dx$ n'est qu'un **moyen mnémotechnique** : elle traduit que $\frac{dt}{dx} = u'(x)$. Elle n'a de sens rigoureux que parce que le théorème ci-dessus la justifie. On la manipule comme une égalité, mais sans jamais oublier qu'il y a un théorème derrière.

■ **DÉFINITION :**

Méthode en 4 étapes. Pour calculer une intégrale par changement de variable :

1. **Choisir** le changement de variable $t = u(x)$.
2. **Différentier** : calculer $dt = u'(x) dx$.
3. **Changer les bornes** : quand $x = a$, alors $t = u(a)$; quand $x = b$, alors $t = u(b)$.
4. **Tout réexprimer** en fonction de t (plus aucun x ne doit subsister), puis calculer.

4. Premiers exemples : reconnaître une forme $u' \times (f \circ u)$

Exemple : Changement affine

Calculer $I = \int_0^1 (2x + 1)^3 dx$.

On pose $t = 2x + 1$. Alors $dt = 2 dx$, c'est-à-dire $dx = \frac{1}{2} dt$.

Bornes : $x = 0 \Rightarrow t = 1$ et $x = 1 \Rightarrow t = 3$.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 t^3 \times \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^4}{4} \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{8} (81 - 1) = 10 \end{aligned}$$

Exemple : Avec une exponentielle

Calculer $J = \int_0^1 x e^{x^2} dx$.

On pose $t = x^2$. Alors $dt = 2x dx$, donc $x dx = \frac{1}{2} dt$.

Bornes : $x = 0 \Rightarrow t = 0$ et $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{1}{2} e^t dt \\ &= \frac{1}{2} [e^t]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (e - 1) \end{aligned}$$

Remarque : on retrouve $\left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1$, ce qui confirme que le facteur x était bien « la moitié de la dérivée » de x^2 .

Exemple : Apparition d'un logarithme

Calculer $K = \int_1^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

On pose $t = x^2 + 1$. Alors $dt = 2x dx$, donc $x dx = \frac{1}{2} dt$.

Bornes : $x = 1 \Rightarrow t = 2$ et $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

$$\begin{aligned} K &= \int_2^5 \frac{1}{2} \times \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} [\ln |t|]_2^5 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Ici $t = x^2 + 1 \geq 1 > 0$ sur tout l'intervalle, donc on peut écrire $\ln t$ sans valeur absolue.

5. Le changement de variable « choisi » : la substitution

Dans les exemples précédents, le changement de variable était *lu* dans l'intégrale : on reconnaissait une dérivée. Mais parfois, c'est nous qui **décidons** d'introduire une nouvelle variable astucieuse, par une relation $x = \varphi(t)$. C'est le cas typique des racines carrées.

Remarque : Lorsqu'on pose $x = \varphi(t)$ (et non $t = u(x)$), il faut que φ soit une **bijection** (de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone) de l'intervalle des t vers l'intervalle des x . C'est cette condition qui garantit que chaque borne en x correspond à **une seule** borne en t .

Exemple : Substitution trigonométrique

Calculer $L = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, l'aire d'un quart de disque de rayon 1.

On pose $x = \sin t$, avec $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: sur cet intervalle, $\sin$ est une bijection croissante vers $[0; 1]$.

On a $dx = \cos t dt$.

Bornes : $x = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Gestion de la racine (point délicat) :

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$$

car $\cos t \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \times \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Vérification : l'aire d'un quart de disque de rayon 1 vaut bien $\frac{\pi \times 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$.

6. Application : les règles de Bioche

Les **fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$** — c'est-à-dire les quotients de polynômes en $\cos x$ et $\sin x$, comme $\frac{1}{\sin x}$, $\cos^3 x$ ou $\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$ — reviennent très souvent. Les **règles de Bioche** indiquent, pour chacune, le changement de variable le plus efficace.

A. Le principe : tester l'élément différentiel

L'idée centrale, et la source d'erreur n°1, est la suivante : on ne teste pas la fonction $f(x)$ seule, mais l'**élément différentiel** tout entier :

$$\omega(x) = f(x) dx$$

Le dx doit impérativement être inclus dans le test, car il change lui-même de signe selon la transformation :

- $x \mapsto -x$ transforme dx en $-dx$;
- $x \mapsto \pi - x$ transforme dx en $-dx$;
- $x \mapsto \pi + x$ transforme dx en $+dx$.

■ THÉORÈME : Règles de Bioche

Soit $\omega(x) = f(x) dx$ l'élément différentiel d'une intégrale de fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$.

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$, on pose $\boxed{t = \cos x}$.
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on pose $\boxed{t = \sin x}$.
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, on pose $\boxed{t = \tan x}$.

Remarque : Moyen mnémotechnique On pose t égal à la fonction trigonométrique **invariante par la même transformation** que l'élément différentiel :

- $\cos(-x) = \cos x \longrightarrow t = \cos x$;
- $\sin(\pi - x) = \sin x \longrightarrow t = \sin x$;
- $\tan(\pi + x) = \tan x \longrightarrow t = \tan x$.

B. Si aucune règle ne s'applique : le changement universel

Quand aucune des trois invariances n'est vérifiée, il reste un changement de variable qui fonctionne **toujours** : $t = \tan \frac{x}{2}$.

■ PROPRIÉTÉ : Changement de variable universel

$t = \tan \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} & \sin x &= \frac{2t}{1 + t^2} \\ \tan x &= \frac{2t}{1 - t^2} & dx &= \frac{2}{1 + t^2} dt \end{aligned}$$

Remarque : Le changement universel marche dans tous les cas, mais il conduit souvent à des calculs plus lourds (apparition de fractions de degré élevé).

Lorsqu'une règle de Bioche s'applique, elle donne presque toujours le chemin le plus court : on l'essaie donc **en priorité**.

C. Exemples

Exemple : Règle 2 : on pose $t = \sin x$

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$.

Test : ici $\omega(x) = \cos^3 x dx$. Par $x \mapsto \pi - x$:

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \text{et} \quad dx \mapsto -dx$$

donc $\omega(\pi - x) = (-\cos x)^3 \times (-dx) = \cos^3 x dx = \omega(x)$. La deuxième règle s'applique : on pose $t = \sin x$.

Calcul : on isole un facteur $\cos x$: $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos x$.

On a $dt = \cos x dx$, et les bornes : $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx &= \int_0^1 (1 - t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Exemple : Règle 1 : on pose $t = \cos x$

Déterminer une primitive de la fonction f définie, pour tout $x \in]0; \pi[$, par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

Test : $\omega(x) = \frac{dx}{\sin x}$. Par $x \mapsto -x$:

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad dx \mapsto -dx$$

donc $\omega(-x) = \frac{-dx}{-\sin x} = \frac{dx}{\sin x} = \omega(x)$. On pose $t = \cos x$.

Calcul : on multiplie haut et bas par $\sin x$ pour faire apparaître $\sin x dx$:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}$$

Avec $t = \cos x$ et $dt = -\sin x dx$:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{-1}{1 - t^2} dt = \int \frac{1}{t^2 - 1} dt$$

On décompose : $\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} \right)$, d'où

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \frac{1}{2} (\ln |t - 1| - \ln |t + 1|) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| \end{aligned}$$

Remarque : Comparaison avec le changement universel Sur le même exemple, le changement universel $t = \tan \frac{x}{2}$ donne un calcul encore plus court.

Avec $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$ et $dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1 + t^2}{2t} \times \frac{2}{1 + t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

Les deux primitives obtenues ne diffèrent que d'une constante : c'est cohérent.

6. Les erreurs à ne pas commettre

■ PROPRIÉTÉ : Les pièges classiques

1. **Oublier de changer les bornes.** C'est l'erreur n° 1. Si la nouvelle variable est t , les bornes doivent être exprimées en t . (Sinon, il faut revenir à x avant d'évaluer.)
2. **Oublier le facteur $u'(x)$ (le dx).** Écrire $\int f(t) dt$ sans avoir correctement remplacé dx par sa valeur en fonction de dt fausse tout le calcul.
3. **Laisser des x dans l'intégrale en t .** Après le changement de variable, plus **aucun** x ne doit subsister : tout doit s'exprimer avec t .
4. **Oublier la valeur absolue sur une racine.** On a $\sqrt{A^2} = |A|$, et non A . Il faut justifier le signe sur l'intervalle considéré.
5. **Utiliser une substitution non bijective.** Pour $x = \varphi(t)$, si φ n'est pas monotone sur l'intervalle, le changement de bornes devient ambigu.
6. **Manipuler dx et dt comme de simples nombres** sans garder à l'esprit le théorème : la notation différentielle est un outil, pas une formule magique.

Exemple : Une erreur typique de bornes

Reprenons $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ avec $t = x^2$.

Erreur fréquente : écrire $\int_0^1 \frac{1}{2} e^t dt$... mais en gardant par réflexe les bornes 0 et 1 *sans les vérifier*. Ici, par chance, $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$: les bornes coïncident. **Mais** avec $t = x^2 + 1$ (exemple du logarithme), les bornes deviennent 2 et 5 : garder 1 et 2 donnerait un résultat faux. **Toujours recalculer les bornes !**

7. En résumé : la démarche

Remarque : Face à une intégrale, on se pose ces questions dans l'ordre :

1. Est-ce que je reconnais une forme $u'(x) f(u(x))$?
→ je pose $t = u(x)$.
2. Y a-t-il une racine ou une expression « gênante » à éliminer ?
→ je choisis une substitution $x = \varphi(t)$ adaptée (souvent trigonométrique).
3. Est-ce une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$?
→ j'applique les **règles de Bioche** (et, à défaut, $t = \tan \frac{x}{2}$).

4. Une fois le changement posé : **calculer dt (ou dx)**, **changer les bornes**, **tout réexprimer**, puis intégrer.

8. Exercices

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes par un changement de variable bien choisi.

$$1. A = \int_0^1 3x^2 (x^3 + 1)^4 dx$$

$$2. B = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$3. C = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

1. On pose $t = x^3 + 1$, donc $dt = 3x^2 dx$.
Bornes : $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$$A = \int_1^2 t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5} \right]_1^2 = \frac{32 - 1}{5} = \frac{31}{5}$$

2. On pose $t = x^2 + 1$, donc $dt = 2x dx$, soit $x dx = \frac{1}{2} dt$.

Bornes : $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$$B = \int_1^2 \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} [2\sqrt{t}]_1^2 = \sqrt{2} - 1$$

3. On pose $t = \ln x$, donc $dt = \frac{1}{x} dx$.
Bornes : $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = e \Rightarrow t = 1$.

$$C = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Exercice 2

$$1. \text{ Calculer } D = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

(on pourra poser $t = 1 + e^x$).

$$2. \text{ Calculer } E = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx$$

(on pourra poser $t = 1 - x^2$).

1. On pose $t = 1 + e^x$, donc $dt = e^x dx$.
Bornes : $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = \ln 2 \Rightarrow t = 1 + 2 = 3$.

$$D = \int_2^3 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_2^3 = \ln \frac{3}{2}$$

2. On pose $t = 1 - x^2$, donc $dt = -2x dx$, soit $x dx = -\frac{1}{2} dt$.

Bornes : $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

$$E = \int_1^0 -\frac{1}{2} \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

On a utilisé $\int_1^0 d = - \int_0^1 d$ pour remettre les bornes dans l'ordre croissant.

Exercice 3

Calculer

$$F = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

en posant $x = 2 \sin t$. Interpréter géométriquement le résultat.

On pose $x = 2 \sin t$ avec $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (sin y est une bijection croissante de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[0; 1]$, donc $2 \sin t$ parcourt $[0; 2]$).

On a $dx = 2 \cos t dt$.

Bornes : $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Racine :

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2|\cos t| = 2 \cos t$$

car $\cos t \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \times 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$= 4 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt$$

$$= 2 \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

Interprétation : F est l'aire du quart de disque de rayon 2, soit $\frac{\pi \times 2^2}{4} = \pi$. Cohérent.

Exercice 4

Pour chaque intégrale, déterminer la règle de Bioche applicable, puis calculer.

$$1. G = \int \sin^3 x dx \quad (\text{on demande une primitive})$$

$$2. H = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$$

1. $\omega(x) = \sin^3 x \, dx$. Par $x \mapsto -x : \sin^3(-x) = -\sin^3 x$ et $dx \mapsto -dx$, donc $\omega(-x) = \omega(x)$. On pose $t = \cos x$.

On écrit $\sin^3 x = (1 - \cos^2 x) \sin x$, avec $dt = -\sin x \, dx$:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int (1 - t^2) (-1) \, dt = \int (t^2 - 1) \, dt \\ &= \frac{t^3}{3} - t = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x \end{aligned}$$

2. $\omega(x) = \frac{dx}{\cos x}$. Par $x \mapsto \pi - x : \cos(\pi - x) = -\cos x$ et $dx \mapsto -dx$, donc $\omega(\pi - x) = \frac{-dx}{-\cos x} = \omega(x)$. On pose $t = \sin x$.

On multiplie haut et bas par $\cos x$: $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$, avec $dt = \cos x \, dx$.

Bornes : $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} H &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1 - t^2} \, dt = \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln (3 + 2\sqrt{2}) = \ln (1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\text{car } 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2.$$

Exercice 5

Pour aller plus loin Soit f une fonction continue sur $[-a; a]$ (avec $a > 0$).

1. On suppose f **paire**. À l'aide du changement de variable $x = -t$, démontrer que :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$$

2. On suppose f **impair**. Démontrer de même que $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$.

1. On coupe l'intégrale : $\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_{-a}^0 f(x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx$.

Dans la première, on pose $x = -t$, donc $dx = -dt$.
Bornes : $x = -a \Rightarrow t = a$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

$$\int_{-a}^0 f(x) \, dx = \int_a^0 f(-t) \times (-1) \, dt = \int_0^a f(-t) \, dt$$

Comme f est paire, $f(-t) = f(t)$, donc cette intégrale vaut $\int_0^a f(t) \, dt = \int_0^a f(x) \, dx$.

En sommant : $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$.

2. Même découpage et même changement de variable. Cette fois f est impaire, donc $f(-t) = -f(t)$ et :

$$\int_{-a}^0 f(x) \, dx = \int_a^0 f(-t) \, dt = - \int_0^a f(t) \, dt$$

En sommant avec $\int_0^a f(x) \, dx$, les deux termes s'annulent : l'intégrale vaut 0.