

Diagonalisation

1. Pourquoi diagonaliser une matrice ?

De nombreux problèmes (suites couplées, marches aléatoires, modèles d'évolution) se ramènent au calcul de la puissance n -ième d'une matrice carrée.

Exemple : Un problème de suites couplées

On considère les suites (s_n) et (d_n) définies par $s_0 = 1$, $d_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} s_{n+1} = 2s_n + 2d_n \\ d_{n+1} = s_n + 3d_n \end{cases}$$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} s_n \\ d_n \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, ce système s'écrit $X_{n+1} = M \times X_n$, donc :

$$X_n = M^n \times X_0.$$

Pour obtenir s_n et d_n **en fonction de n** , il faut savoir calculer M^n .

Or, multiplier M par elle-même n fois est inextricable. L'idée de la **diagonalisation** est de remplacer M par une matrice **diagonale** D , dont les puissances sont immédiates :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \implies D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Tout le travail consiste à trouver les bons nombres λ_1, λ_2 (les **valeurs propres**) et à relier M à D .

2. Valeurs propres et vecteurs propres

A. Définitions

■ DÉFINITION :

Soit M une matrice carrée d'ordre 2 et $\vec{u}$ un vecteur **non nul** de $\mathbb{R}^2$.

On dit que $\vec{u}$ est un **vecteur propre** de M s'il existe un réel λ tel que :

$$M \times \vec{u} = \lambda \vec{u}.$$

Le réel λ est alors appelé la **valeur propre** associée à $\vec{u}$.

Remarque : Géométriquement, $\vec{u}$ est un vecteur propre lorsque son image $M \times \vec{u}$ reste **colinéaire** à $\vec{u}$: la matrice ne fait qu'étirer (ou contracter, ou retourner) $\vec{u}$ d'un facteur λ , sans changer sa direction.

Exemple :

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\vec{u}$ est un vecteur propre de M et préciser la valeur propre.

On calcule :

$$\begin{aligned} M \times \vec{u} &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \vec{u}. \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ est un vecteur propre de M , de valeur propre $\lambda = 4$.

B. Comment trouver les valeurs propres ?

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 2. L'égalité $M \times \vec{u} = \lambda \vec{u}$ s'écrit aussi $M \times \vec{u} - \lambda I \times \vec{u} = \vec{0}$, c'est-à-dire :

$$(M - \lambda I) \times \vec{u} = \vec{0}.$$

■ THÉORÈME :

λ est une valeur propre de M si et seulement si

$$\det(M - \lambda I) = 0.$$

Exercice 1

Montrer que si λ est une valeur propre de M , alors $\det(M - \lambda I) = 0$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

Si λ est une valeur propre, il existe $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que $(M - \lambda I) \times \vec{u} = \vec{0}$.

Raisonnons par l'absurde : supposons $\det(M - \lambda I) \neq 0$. Alors $M - \lambda I$ est inversible, et en multipliant par $(M - \lambda I)^{-1}$:

$$\vec{u} = (M - \lambda I)^{-1} \times \vec{0} = \vec{0},$$

ce qui contredit $\vec{u} \neq \vec{0}$. Donc $M - \lambda I$ n'est pas inversible, c'est-à-dire $\det(M - \lambda I) = 0$.

■ DÉFINITION :

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, l'expression

$$\det(M - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$

est un polynôme du second degré en λ , appelé **polynôme caractéristique** de M . Ses racines sont les valeurs propres de M .

Exemple : Recherche des valeurs propres

Déterminer les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On forme le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}\det(M - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4.\end{aligned}$$

On résout $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$: $\Delta = 25 - 16 = 9$, d'où

$$\lambda_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

M admet **deux valeurs propres distinctes** : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 4$.

C. Comment trouver les vecteurs propres ?

Pour chaque valeur propre λ , on cherche les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant $(M - \lambda I) \times \vec{u} = \vec{0}$: cela revient à résoudre un système linéaire.

Remarque : Comme $\det(M - \lambda I) = 0$, ce système a une infinité de solutions (les deux équations sont proportionnelles). On choisit un vecteur propre « simple », à coordonnées entières. *Tout multiple non nul d'un vecteur propre est encore un vecteur propre.*

Exemple : Recherche des vecteurs propres

Avec $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, déterminer un vecteur propre pour $\lambda_1 = 1$, puis pour $\lambda_2 = 4$.

Pour $\lambda_1 = 1$: $(M - I) \times \vec{u} = \vec{0}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ soit } x + 2y = 0.$$

En prenant $y = -1$: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = 4$: $(M - 4I) \times \vec{u} = \vec{0}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ soit } x = y.$$

En prenant $x = 1$: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Diagonalisation

A. Les matrices D et P

■ DÉFINITION :

Soit M d'ordre 2 admettant deux valeurs propres λ_1, λ_2 , de vecteurs propres $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. On pose :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{u}_1 \mid \vec{u}_2).$$

D est la matrice **diagonale** des valeurs propres ; P est la matrice de **passage** (ses colonnes sont les vecteurs propres).

■ THÉORÈME :

Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires (assuré dès que $\lambda_1 \neq \lambda_2$), alors P est inversible et :

$$M = P \times D \times P^{-1}.$$

On dit que M est **diagonalisable**.

Remarque : L'ordre compte : la 1^{re} colonne de P correspond à la 1^{re} valeur propre de D , la 2^e colonne à la 2^e.

B. Exemple complet

Exemple : Diagonalisation de $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

On a $\lambda_1 = 1$, $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\lambda_2 = 4$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire D et P , puis déterminer P^{-1} .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det P = 2 \times 1 - 1 \times (-1) = 3 \neq 0$, donc P est inversible :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifier que $M = P \times D \times P^{-1}$.

On calcule $P \times D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, puis :

$$\begin{aligned}PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = M.\end{aligned}$$

On retrouve bien M : la diagonalisation est correcte.

C. Toutes les matrices sont-elles diagonalisables ?

La réponse est **non** : tout dépend du nombre de directions de vecteurs propres.

■ PROPRIÉTÉ :

- Si M possède **deux valeurs propres distinctes**, alors M est diagonalisable.
- Si M possède une **unique** valeur propre et une seule direction de vecteurs propres, alors M **n'est pas diagonalisable**.

Exemple : Une matrice non diagonalisable

Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $(1 - \lambda)^2$, de **seule** racine $\lambda = 1$. La résolution de $(N - I)\vec{u} = \vec{0}$ donne $y = 0$: tous les vecteurs propres sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi N **n'est pas diagonalisable**.

4. Application : calcul de M^n et retour aux suites

■ PROPRIÉTÉ :

Si $M = P \times D \times P^{-1}$, alors pour tout entier naturel n :

$$M^n = P \times D^n \times P^{-1}.$$

Exercice 2

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

Initialisation. Pour $n = 0$: $M^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$. Vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $M^n = PD^nP^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : Expression de s_n et d_n

On reprend $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = P \times D \times P^{-1}$.

1. Donner D^n , puis M^n .

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}, \text{ donc } PD^n = \begin{pmatrix} 2 & 4^n \\ -1 & 4^n \end{pmatrix}, \text{ puis :}$$

$$\begin{aligned} M^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + 4^n & 2 \cdot 4^n - 2 \\ 4^n - 1 & 2 \cdot 4^n + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. En déduire s_n et d_n , sachant que

$$\begin{pmatrix} s_n \\ d_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} s_n \\ d_n \end{pmatrix}$ est la première colonne de M^n :

$$s_n = \frac{4^n + 2}{3} \quad \text{et} \quad d_n = \frac{4^n - 1}{3}.$$

Vérification : $s_0 = 1$ et $d_0 = 0$.

Exercice 3

En suivant la même méthode, diagonaliser

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire M^n .

Valeurs propres. $\det(M - \lambda I) = (1 - \lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$, d'où $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$.

Vecteurs propres. Pour $\lambda_1 = 2$: $x = 2y$, d'où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour $\lambda_2 = -1$: $x = -y$, d'où $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Diagonalisation. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

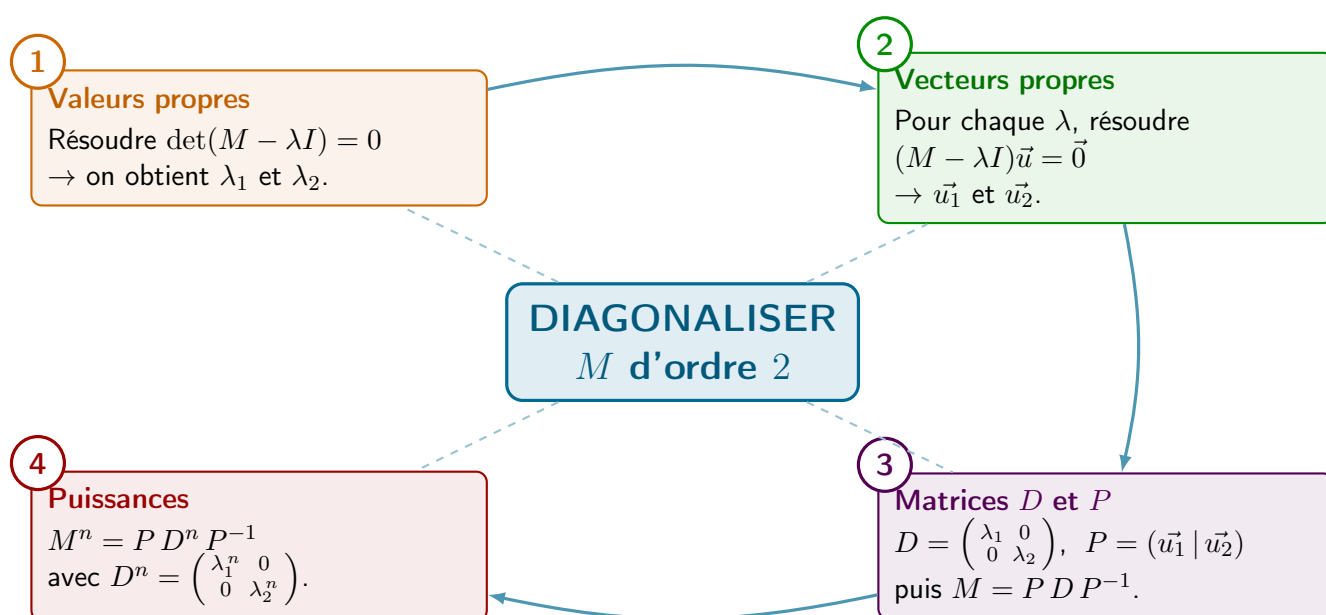
$\det P = -3$, $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Puissance. Avec $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$:

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour aller plus loin. La même méthode appliquée à la suite de Fibonacci ($u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$) fait apparaître le **nombre d'or** $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ comme valeur propre, et conduit à la **formule de Binet** donnant u_n en fonction de n .

5. Carte mentale — la méthode en un coup d'œil



À retenir. Une matrice M d'ordre 2 est **diagonalisable** dès qu'elle possède **deux valeurs propres distinctes**. Diagonaliser, c'est trouver une base de vecteurs propres dans laquelle M agit simplement, en multipliant chaque direction par sa valeur propre. Le calcul de M^n devient alors immédiat.