

Nombres de Fibonacci et nombre d'or

Projet de mathématiques

Caye Flore et Dhénin Sacha

Université Paris Diderot (Paris 7)

30 mars 2016

Sommaire

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618033988749894848204586834365$$

Explicitation du terme général de la suite de Fibonacci

Explicitation du terme général de la suite de Fibonacci

Proposition : Formule de Binet

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci.

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Démonstration

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci.

Démonstration

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci.

$$(P) : \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Démonstration

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci.

$$(P) : \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1) Combinaison linéaire de suites

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites vérifiant la propriété (P) , alors, quels que soient les réels a et b , la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = au_n + bv_n$ la vérifie aussi.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites vérifiant la propriété (P) , et $w_n = au_n + bv_n$, donc :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites vérifiant la propriété (P) , et $w_n = au_n + bv_n$, donc :

$$w_{n+2} = au_{n+2} + bv_{n+2}$$

$$w_{n+2} = a(u_{n+1} + u_n) + b(v_{n+1} + v_n)$$

$$w_{n+2} = (au_{n+1} + bv_{n+1}) + (au_n + bv_n)$$

$$w_{n+2} = w_{n+1} + w_n.$$

Donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (P) .

2) Équation caractéristique

Cherchons les suites géométriques de la forme $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$,
avec $q \in \mathbb{R}$, vérifiant (P) .

2) Équation caractéristique

Cherchons les suites géométriques de la forme $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$,
avec $q \in \mathbb{R}$, vérifiant (P) .

$$(q^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ vérifie } (P) \iff q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$$

2) Équation caractéristique

Cherchons les suites géométriques de la forme $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$,
avec $q \in \mathbb{R}$, vérifiant (P) .

$$\begin{aligned}(q^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ vérifie } (P) &\iff q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \\ &\iff q^2 = q + 1\end{aligned}$$

2) Équation caractéristique

Cherchons les suites géométriques de la forme $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$,
avec $q \in \mathbb{R}$, vérifiant (P) .

$$\begin{aligned}(q^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ vérifie } (P) &\iff q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \\ &\iff q^2 = q + 1 \\ &\iff q^2 - q - 1 = 0\end{aligned}$$

2) Équation caractéristique

Cherchons les suites géométriques de la forme $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$,
avec $q \in \mathbb{R}$, vérifiant (P) .

$$\begin{aligned}(q^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ vérifie } (P) &\iff q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \\ &\iff q^2 = q + 1 \\ &\iff q^2 - q - 1 = 0\end{aligned}$$

Cette équation admet comme solutions :

2) Équation caractéristique

Cherchons les suites géométriques de la forme $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$,
avec $q \in \mathbb{R}$, vérifiant (P) .

$$\begin{aligned}(q^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ vérifie } (P) &\iff q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \\ &\iff q^2 = q + 1 \\ &\iff q^2 - q - 1 = 0\end{aligned}$$

Cette équation admet comme solutions :

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

2) Équation caractéristique

Cherchons les suites géométriques de la forme $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $q \in \mathbb{R}$, vérifiant (P) .

$$\begin{aligned}(q^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ vérifie } (P) &\iff q^{n+2} = q^{n+1} + q^n \\ &\iff q^2 = q + 1 \\ &\iff q^2 - q - 1 = 0\end{aligned}$$

Cette équation admet comme solutions :

$$\underbrace{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}_{\varphi} \quad \text{et} \quad \underbrace{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}_{\tilde{\varphi}}$$

3) Conclusion de 1) et 2)

3) Conclusion de 1) et 2)

Conclusion de 1) :

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $w_n = au_n + bv_n$ vérifie (P) .

3) Conclusion de 1) et 2)

Conclusion de 1) :

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $w_n = au_n + bv_n$ vérifie (P) .

Conclusion de 2) :

Les suites $(\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient (P) .

3) Conclusion de 1) et 2)

Conclusion de 1) :

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $w_n = au_n + bv_n$ vérifie (P) .

Conclusion de 2) :

Les suites $(\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient (P) .

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = a\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n + b\varphi^n$ vérifie (P) .

4) Explicitation de F_n

4) Explicitation de F_n

Considérons maintenant des réelles a et b tels que $w_n = F_n$.

On a alors :

$$\begin{cases} w_0 = F_0 \\ w_1 = F_1 \end{cases}$$

4) Explicitation de F_n

Considérons maintenant des réelles a et b tels que $w_n = F_n$.

On a alors :

$$\begin{cases} w_0 = F_0 \\ w_1 = F_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^0 + b\varphi^0 = 0 \\ a \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^1 + b\varphi^1 = 1 \end{cases}$$

4) Explicitation de F_n

Considérons maintenant des réelles a et b tels que $w_n = F_n$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} w_0 = F_0 \\ w_1 = F_1 \end{cases} &\iff \begin{cases} a \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^0 + b\varphi^0 = 0 \\ a \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^1 + b\varphi^1 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ -\frac{a}{\varphi} + b\varphi = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

4) Explicitation de F_n

Considérons maintenant des réelles a et b tels que $w_n = F_n$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} w_0 = F_0 \\ w_1 = F_1 \end{cases} &\iff \begin{cases} a \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^0 + b\varphi^0 = 0 \\ a \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^1 + b\varphi^1 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ -\frac{a}{\varphi} + b\varphi = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

En résolvant le système, on obtient :

$$\begin{cases} a = -\frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \\ b = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \\ b = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \\ b = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \end{cases}$$

$$\text{Or, } \varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

$$\begin{cases} a = -\frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \\ b = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \end{cases}$$

Or, $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, d'où $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\varphi^2 + 1 = \varphi + 2 = \sqrt{5}\varphi$.

$$\begin{cases} a = -\frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \\ b = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \end{cases}$$

Or, $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, d'où $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\varphi^2 + 1 = \varphi + 2 = \sqrt{5}\varphi$.

$$\text{Ainsi } \begin{cases} a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ b = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \\ b = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \end{cases}$$

Or, $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, d'où $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\varphi^2 + 1 = \varphi + 2 = \sqrt{5}\varphi$.

$$\text{Ainsi } \begin{cases} a = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \\ b = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases} \quad \text{et donc } F_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n.$$

On en conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n$$

On en conclut que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, F_n &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \right]\end{aligned}$$

On en conclut que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, F_n &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \right]\end{aligned}$$

D'après le paragraphe d'introduction, $-\frac{1}{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

On en conclut que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, F_n &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \right]\end{aligned}$$

D'après le paragraphe d'introduction, $-\frac{1}{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

On en conclut la formule de Binet :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]}$$

Deux autre preuves de la formule de Binet

Matrices et suite de Fibonacci

Deux autre preuves de la formule de Binet

Matrices et suite de Fibonacci

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci.

Par définition de la suite de Fibonacci, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \\ F_n = F_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}.$$

Deux autre preuves de la formule de Binet

Matrices et suite de Fibonacci

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci.

Par définition de la suite de Fibonacci, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \\ F_n = F_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}.$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}. \text{ Posons } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}. \text{ Posons } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a les égalités suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$

(que l'on prouve sans difficulté par récurrence sur n).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}. \text{ Posons } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a les égalités suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$
(que l'on prouve sans difficulté par récurrence sur n).
- $M = ANA^{-1}$ avec $A = \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi} \end{pmatrix}.$
(on a diagonalisé la matrice)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}. \text{ Posons } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a les égalités suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$
(que l'on prouve sans difficulté par récurrence sur n).
- $M = ANA^{-1}$ avec $A = \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi} \end{pmatrix}.$
(on a diagonalisé la matrice)
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, (ANA^{-1})^n = AN^nA^{-1}.$
(que l'on prouve sans difficulté par récurrence sur n).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}. \text{ Posons } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a les égalités suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$
(que l'on prouve sans difficulté par récurrence sur n).
- $M = ANA^{-1}$ avec $A = \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi} \end{pmatrix}.$
(on a diagonalisé la matrice)
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, (ANA^{-1})^n = AN^nA^{-1}.$
(que l'on prouve sans difficulté par récurrence sur n).

On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = AN^nA^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\varphi} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\varphi} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\varphi} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}}\end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\varphi} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi & \tilde{\varphi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n \\ -\tilde{\varphi}^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}}\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1} \\ \varphi^n - \tilde{\varphi}^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{\varphi - \tilde{\varphi}}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\varphi - \tilde{\varphi}}}.$$

On remarque que $\varphi - \tilde{\varphi} = \sqrt{5}$, et ainsi, on retrouve la formule de

$$\text{Binet : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \tilde{\varphi}^n)}$$

Fonction génératrice de la suite de Fibonacci

Fonction génératrice de la suite de Fibonacci

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \varphi, \frac{1}{\varphi} \right\}, \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right) \right) x^n$$

Définition

On appelle fonction génératrice de la famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la fonction

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Définition

On appelle fonction génératrice de la famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la fonction

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Ainsi, la fonction génératrice de la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Fibonacci est

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n.$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n.$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n.$$

$$\text{Donc } F(x) = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^n$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n.$$

$$\text{Donc } F(x) = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \quad (\text{car } F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1)$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } F(x) &= F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \quad (\text{car } F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1) \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^n \end{aligned}$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n.$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } F(x) &= F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \quad (\text{car } F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1) \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^n \\ &= x + x \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^{n-2}\end{aligned}$$

$$F(x) = x + x \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^{n-2}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= x + x \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\ &= x + x \sum_{k=1}^{+\infty} F_k x^k + x^2 \sum_{l=0}^{+\infty} F_l x^l \text{ (avec } k = n-1 \text{ et } l = n-2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= x + x \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\
 &= x + x \sum_{k=1}^{+\infty} F_k x^k + x^2 \sum_{l=0}^{+\infty} F_l x^l \text{ (avec } k = n-1 \text{ et } l = n-2). \\
 &= x + xF(x) + x^2 F(x) \text{ (car } F_0 = 0, \text{ d'où} \\
 &\qquad\qquad\qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= x + x \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\
 &= x + x \sum_{k=1}^{+\infty} F_k x^k + x^2 \sum_{l=0}^{+\infty} F_l x^l \text{ (avec } k = n-1 \text{ et } l = n-2). \\
 &= x + xF(x) + x^2 F(x) \text{ (car } F_0 = 0, \text{ d'où} \\
 &\qquad\qquad\qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n) \\
 &= \frac{x}{1 - x - x^2}, \text{ pour } x \text{ tel que } 1 - x - x^2 \neq 0
 \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \varphi, \frac{1}{\varphi} \right\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \varphi, \frac{1}{\varphi} \right\}$.

En effectuant la décomposition en éléments simples de $\frac{x}{1 - x - x^2}$,
on obtient :

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} \left[\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)x} \right].$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \varphi, \frac{1}{\varphi} \right\}$.

En effectuant la décomposition en éléments simples de $\frac{x}{1 - x - x^2}$,
on obtient :

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \underbrace{\frac{\varphi}{\varphi^2 + 1}}_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \left[\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)x} \right].$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \varphi, \frac{1}{\varphi} \right\}$.

En effectuant la décomposition en éléments simples de $\frac{x}{1-x-x^2}$,
on obtient :

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \underbrace{\frac{\varphi}{\varphi^2+1}}_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \left[\underbrace{\frac{1}{1-\varphi x}}_{\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n x^n} - \underbrace{\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n x^n}{1 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)x}} \right].$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \varphi, \frac{1}{\varphi} \right\}$,

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right) x^n.$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \varphi, \frac{1}{\varphi} \right\}$,

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right) x^n.$$

$$\text{Or, } F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n.$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \varphi, \frac{1}{\varphi} \right\}$,

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right) x^n.$$

$$\text{Or, } F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n.$$

$$\text{Ainsi } \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right) x^n.$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \varphi, \frac{1}{\varphi} \right\}$,

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right) x^n.$$

$$\text{Or, } F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n.$$

$$\text{Ainsi } \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right) x^n.$$

Par identification, on retrouve la formule de Binet.

Détermination d'une relation de récurrence directe

On sait que le rapport de deux termes consécutifs de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers le nombre d'or, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Détermination d'une relation de récurrence directe

On sait que le rapport de deux termes consécutifs de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers le nombre d'or, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Donc, de $F_{n+1} = \varphi F_n + r(n)$ avec $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} r(n) = 0$.

Détermination d'une relation de récurrence directe

On sait que le rapport de deux termes consécutifs de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers le nombre d'or, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Donc, de $F_{n+1} = \varphi F_n + r(n)$ avec $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} r(n) = 0$.

On a $F_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$ (d'après la formule de Binet).

Détermination d'une relation de récurrence directe

On sait que le rapport de deux termes consécutifs de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers le nombre d'or, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Donc, de $F_{n+1} = \varphi F_n + r(n)$ avec $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} r(n) = 0$.

On a $F_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$ (d'après la formule de Binet).

$$\begin{aligned} \text{D'où } \varphi F_n &= \frac{\varphi^{n+1} - \varphi \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\varphi^{n+1} - (\tilde{\varphi} + \sqrt{5}) \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \text{ car } \tilde{\varphi} = \varphi - \sqrt{5} \end{aligned}$$

Détermination d'une relation de récurrence directe

On sait que le rapport de deux termes consécutifs de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers le nombre d'or, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Donc, de $F_{n+1} = \varphi F_n + r(n)$ avec $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} r(n) = 0$.

On a $F_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$ (d'après la formule de Binet).

$$\begin{aligned} \text{D'où } \varphi F_n &= \frac{\varphi^{n+1} - \varphi \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\varphi^{n+1} - (\tilde{\varphi} + \sqrt{5}) \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \text{ car } \tilde{\varphi} = \varphi - \sqrt{5} \\ &= \frac{\varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1} - \sqrt{5} \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \varphi F_n = \frac{\varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}} - \tilde{\varphi}^n$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \varphi F_n &= \frac{\varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}} - \tilde{\varphi}^n \\ &= F_{n+1} - \tilde{\varphi}^n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \varphi F_n &= \frac{\varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}} - \tilde{\varphi}^n \\ &= F_{n+1} - \tilde{\varphi}^n.\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = \varphi F_n + \tilde{\varphi}^n}.$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \varphi F_n &= \frac{\varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}} - \tilde{\varphi}^n \\ &= F_{n+1} - \tilde{\varphi}^n.\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = \varphi F_n + \tilde{\varphi}^n}$.

On a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\varphi}^n = 0$ (car $0 < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 1$), donc $r(n) = \tilde{\varphi}^n$.

Conclusion

- $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \tilde{\varphi}^n)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \varphi, \frac{1}{\varphi} \right\}, \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right) \right) x^n$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = \varphi F_n + \tilde{\varphi}^n$