

Développements limités

1. Introduction

En physique comme en mathématiques, on est souvent amené à étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'un point. Par exemple :

- Comment se comporte $\sin(x)$ quand x est très petit en valeur absolue ?
- Peut-on écrire autrement e^x quand x est proche de 0 ?
- Comment approximer $\sqrt{1+x}$ pour x petit ?

L'idée fondamentale des **développements limités** est d'approcher une fonction « compliquée » par un polynôme, qui est beaucoup plus simple à manipuler.

Exemple : Motivation

On sait que pour x proche de 0, la fonction sinus se comporte « presque » comme la fonction identité. En effet,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ce qui signifie que $\sin x \approx x$ quand x est petit.

Mais peut-on faire mieux ? Peut-on trouver un polynôme qui approche $\sin x$ avec plus de précision ? et sous quelles conditions ?

2. Approximation affine : rappels

Soit f une fonction dérivable en un point a . On sait que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Cette expression constitue la **meilleure approximation affine** de f au voisinage de a .

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction dérivable en a . On dit que f admet un **développement limité (DL) à l'ordre 1** au voisinage de a si :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$$

où ε est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque : $(x - a)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ signifie que l'erreur d'approximation tend vers 0 « plus vite » que $(x - a)$.

On note souvent cette erreur $o(x - a)$ (lire « petit o de $(x - a)$ »).

Exemple :

Pour $f(x) = e^x$ au voisinage de 0 :

- $f(0) = e^0 = 1$
- $f'(0) = e^0 = 1$

Donc $e^x \approx 1 + x$ au voisinage de 0.

L'approximation affine est utile, mais elle a ses limites. Pour améliorer la précision, on peut chercher une approximation par un polynôme de degré supérieur.

Question : Comment trouver le « meilleur » polynôme de degré n qui approche f au voisinage de a ?

3. Vers les développements limités d'ordre supérieur

A. Idée générale

On cherche un polynôme

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n$$

tel que $f(x) \approx P(x)$ au voisinage de a .

Pour que cette approximation soit la meilleure possible, on impose que P et f aient :

- la même valeur en a : $P(a) = f(a)$
- la même dérivée en a : $P'(a) = f'(a)$
- la même dérivée seconde en a : $P''(a) = f''(a)$
- et ainsi de suite jusqu'à l'ordre n

Exemple : Recherche du polynôme pour e^x

Cherchons le polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ qui approche au mieux e^x au voisinage de 0.

B. Calcul des coefficients en général

Soit $P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$.
Calculons les dérivées successives de P en a :

■ THÉORÈME : Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a (c'est-à-dire n fois dérivable sur I , de dérivée n -ième continue).

Alors, pour tout x au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Autrement dit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Remarques :

1. Par convention, $0! = 1$ et $f^{(0)} = f$.
2. La notation $o((x-a)^n)$ signifie que le reste tend vers 0 plus vite que $(x-a)^n$ quand x tend vers a .
3. Le polynôme $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ s'appelle le **polynôme de Taylor** de f à l'ordre n en a .

■ DÉFINITION :

Soit f une fonction et a un réel. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n** au voisinage de a s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

4. Applications : développements limités usuels en 0

En appliquant la formule de Taylor-Young avec $a = 0$, on obtient les développements limités les plus courants.

Exemple : DL de e^x à l'ordre n en 0

Pour $f(x) = e^x$, on a $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout k , donc $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout k .

Exemple : DL de $\cos x$ à l'ordre $2n$ en 0

Pour $f(x) = \cos x$, calculons les dérivées successives :

Exemple : DL de $\sin x$ à l'ordre $2n + 1$ en 0

Exemple : DL de $(1 + x)^\alpha$ à l'ordre n en 0

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (1 + x)^\alpha$.

Exemple : DL de $\frac{1}{1-x}$ et de $\ln(1+x)$ par intégration

On se propose de retrouver le DL de $\ln(1+x)$ à partir de celui de $\frac{1}{1+x}$.

Remarque : Cette méthode d'intégration est très puissante : elle permet d'obtenir de nouveaux DL à partir de DL connus. On peut aussi utiliser la dérivation terme à terme.

Par exemple, en dérivant le DL de $\ln(1+x)$, on retrouve celui de $\frac{1}{1+x}$.

5. Formulaire des développements limités usuels en 0

■ PROPRIÉTÉ : Développements limités usuels

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + o(x^n)$$

6. Application en physique

En physique, les développements limités sont essentiels pour simplifier les équations dans les régimes de « petites perturbations ».

Exemple : Le pendule simple

L'équation du mouvement d'un pendule simple est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Pour de petites oscillations (θ petit), on utilise le DL de $\sin \theta$ à l'ordre 1 :

$$\sin \theta \approx \theta$$

L'équation devient alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique, beaucoup plus simple à résoudre.

Exemple : Approximation relativiste

En relativité restreinte, l'énergie cinétique est :

$$E_c = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Pour $v \ll c$, posons $x = -\frac{v^2}{c^2}$ (petit). En utilisant

$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$, on obtient :

Remarque : La formule de Taylor-Young permet donc de :

1. Approximer des fonctions compliquées par des polynômes
2. Simplifier des équations physiques en régime de petites perturbations
3. Calculer des limites de formes indéterminées
4. Étudier le comportement local des fonctions