

Les intégrales impropres : une introduction

1 Introduction

En Terminale, vous avez découvert la notion d'**intégrale** pour calculer l'aire sous une courbe entre deux bornes finies. Mais que se passe-t-il si l'une des bornes (ou les deux) devient infinie, ou si la fonction n'est pas bornée sur l'intervalle d'intégration ? On parle alors d'**intégrales impropres**. Ce document vise à vous introduire à cette notion subtile, en insistant sur les pièges à éviter et les idées clés à retenir.

2 Qu'est-ce qu'une intégrale impropre ?

PROPRIÉTÉ 2.1 (DÉFINITION). Une intégrale est dite **impropre** si :

- L'intervalle d'intégration est infini (par exemple, $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$).
- La fonction à intégrer n'est pas bornée sur l'intervalle d'intégration (par exemple, $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$).

3 Intégrales impropres sur un intervalle infini

3.1 Cas d'une borne infinie

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On définit :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Si cette limite existe et est finie, on dit que l'intégrale **converge**. Sinon, elle **diverge**.

EXEMPLE 3.1. Calculons $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$:

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1$$

En faisant tendre b vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1$$

Donc, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$: l'intégrale **converge**.

3.2 Cas des deux bornes infinies

Si f est continue sur $\mathbb{R}$, on définit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

où c est un réel quelconque. **Attention** : il faut que **les deux intégrales** convergent séparément pour que l'intégrale totale converge.

4 Le piège de la fonction impaire : $\int_{-a}^a \frac{1}{x} dx$

EXEMPLE 4.1. Considérons $f(x) = \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Cette fonction est **impair** : $f(-x) = -f(x)$. On pourrait penser que :

$$\int_{-a}^a \frac{1}{x} dx = 0$$

car l'aire "à gauche" et l'aire "à droite" semblent s'annuler. Mais attention :

$$\int_{-a}^a \frac{1}{x} dx = \int_{-a}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^a \frac{1}{x} dx$$

Or, chacune de ces intégrales **diverge** :

$$\int_0^a \frac{1}{x} dx = \ln(a) - \ln(0^+) = +\infty$$

$$\int_{-a}^0 \frac{1}{x} dx = -\infty$$

On ne peut donc pas conclure que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 0. En réalité, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ **n'existe pas** au sens des intégrales impropres.

REMARQUE . Même si f est impaire, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ n'existe pas forcément ! Il faut que l'intégrale converge **absolument**, c'est-à-dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ converge.

5 Intégrales impropres avec fonction non bornée

PROPRIÉTÉ 5.1. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ mais non bornée en b . On définit :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

Si la limite existe, l'intégrale converge.

EXEMPLE 5.1. Calculons $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$:

$$\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{c} - 2\sqrt{0} = 2\sqrt{c}$$

En faisant tendre c vers 1, on obtient :

$$\lim_{c \rightarrow 1^-} 2\sqrt{c} = 2$$

Donc, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$: l'intégrale converge.

6 Exercices d'application

EXERCICE 6.1. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$
2. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (on admet que cette intégrale converge).

7 Conclusion

Les intégrales impropres permettent d'étendre la notion d'intégrale à des cas où l'intervalle ou la fonction ne sont pas bornés. Cependant, il faut être vigilant :

- Une fonction impaire n'implique pas que son intégrale sur $\mathbb{R}$ soit nulle.
- Il faut toujours vérifier la convergence **séparément** pour chaque partie de l'intégrale.