

Inégalités de concentration et loi des grands nombres

1. Introduction

En probabilités, on dispose souvent d'informations partielles sur une variable aléatoire : on connaît son espérance, parfois sa variance, mais pas sa loi complète. Les **inégalités de concentration** permettent alors de **majorer** ou **minorer** des probabilités à partir de ces seules données.

Exemple : Motivation

On sait que le salaire mensuel moyen en France est environ 2 500 €. Sans connaître la distribution exacte des salaires, peut-on dire quelque chose sur la probabilité qu'un salarié gagne plus de 10 000 € ?

L'inégalité de Markov va permettre de répondre à cette question avec un minimum d'hypothèses.

Dans ce chapitre, on établit deux inégalités fondamentales, puis on les applique à l'étude du comportement de la **moyenne empirique** d'un grand échantillon, jusqu'à la loi des grands nombres.

2. L'inégalité de Markov

■ DÉFINITION :

Une variable aléatoire X est dite **positive ou nulle** lorsque toutes les valeurs qu'elle prend sont des réels positifs ou nuls.

Remarque : Exemples naturels de variables aléatoires positives ou nulles : un salaire, une durée, un nombre de succès, un taux physiquement mesuré, etc.

■ THÉORÈME :

Soit X une variable aléatoire **positive ou nulle** d'espérance $E(X)$.

Pour tout réel $a > 0$:

$$p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Cette inégalité s'appelle **inégalité de Markov**.

Remarques :

1. Cette inégalité n'est **utile** que lorsque $a > E(X)$: si $a \leq E(X)$, le membre droit est ≥ 1 , ce qui ne dit rien (toute probabilité est ≤ 1).
2. Le majorant obtenu est en général *pessimiste* : la vraie probabilité peut être bien plus petite.

Démonstration guidée. Notons $x_1, \dots, x_n$ les valeurs prises par X (toutes ≥ 0).

Étape 1. Écrire $E(X) = \sum_i x_i p(X = x_i)$ et scinder la somme selon $x_i < a$ ou $x_i \geq a$.

$$E(X) = \sum_{x_i < a} x_i p(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i p(X = x_i)$$

Étape 2. Minorer $E(X)$: les termes de la première somme sont ≥ 0 , donc les supprimer ne peut que diminuer.

$$E(X) \geq \sum_{x_i \geq a} x_i p(X = x_i)$$

Étape 3. Dans la somme restante, minorer chaque x_i par a (puisque $x_i \geq a$), puis conclure.

$$E(X) \geq \sum_{x_i \geq a} a \times p(X = x_i) = a \times p(X \geq a)$$

On divise par $a > 0$: $p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$. $\square$

Exemple : Application directe

En 2023, le salaire brut mensuel moyen en France est environ 2 500 €. Majorer la probabilité qu'un salarié choisi au hasard gagne plus de 7 500 €.

Soit X le salaire d'un salarié. X est positive ou nulle et $E(X) = 2\,500$.

Inégalité de Markov avec $a = 7\,500$:

$$p(X \geq 7\,500) \leq \frac{2\,500}{7\,500} = \frac{1}{3} \approx 33,3\%.$$

Moins d'un tiers des salariés gagne plus de 7 500 € par mois.

3. De l'espérance à la variance

L'inégalité de Markov exige que X soit positive et ne contrôle que l'éloignement *d'un côté*. Pour mesurer l'écart *en valeur absolue* à la moyenne, on fait appel à la **variance**.

■ DÉFINITION :

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$.
La **variance** de X est :

$$\begin{aligned} V(X) &= E([X - E(X)]^2) \\ &= \sum_i (x_i - E(X))^2 p(X = x_i) \end{aligned}$$

L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques :

1. $V(X) \geq 0$; $V(X) = 0$ si et seulement si X est constante (presque sûrement).
2. **Formule de König-Huygens :**

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

3. La variance mesure la **dispersion** autour de la moyenne : variance faible $\Leftrightarrow$ valeurs concentrées près de $E(X)$.

Exemple : Interprétation financière

Deux actions X et Y ont le même gain espéré $E(X) = E(Y) = 5$ €, mais $V(X) = 1$ et $V(Y) = 100$. L'action Y est beaucoup plus volatile. Un investisseur prudent préférera X .

4. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

■ THÉORÈME :

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.

Pour tout réel $a > 0$:

$$p(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Cette inégalité s'appelle **inégalité de Bienaymé-Tchebychev**.

Remarques :

1. X n'a **pas besoin d'être positive** : c'est une inégalité sur l'écart à la moyenne.
2. En passant au complémentaire, on obtient une **minoration** :

$$p(|X - E(X)| < a) \geq 1 - \frac{V(X)}{a^2}$$

Démonstration guidée. L'idée est de se ramener à l'inégalité de Markov en construisant une variable positive.

Étape 1. Poser $Y = [X - E(X)]^2$. Vérifier que $Y \geq 0$ et identifier $E(Y)$.

$$Y = [X - E(X)]^2 \geq 0; \quad E(Y) = E([X - E(X)]^2) = V(X).$$

Étape 2. Montrer que

$$\{|X - E(X)| \geq a\} = \{Y \geq a^2\}$$

$$|X - E(X)| \geq a \iff [X - E(X)]^2 \geq a^2 \iff Y \geq a^2.$$

Étape 3. Appliquer l'inégalité de Markov à Y avec le seuil a^2 , puis conclure.

$$p(|X - E(X)| \geq a) = p(Y \geq a^2) \leq \frac{E(Y)}{a^2} = \frac{V(X)}{a^2}.$$

Exemple : Application directe

La glycémie moyenne d'une population est $E(X) = 1$ g/L avec une variance $V(X) = 0,1$. Un taux est dit critique s'il est hors de $[0,5; 1,5]$. Majorer la probabilité d'un taux critique.

Taux critique $\Leftrightarrow |X - 1| \geq 0,5$. D'après Bienaymé-Tchebychev :

$$p(|X - 1| \geq 0,5) \leq \frac{0,1}{(0,5)^2} = \frac{0,1}{0,25} = 0,4.$$

La probabilité d'un taux critique est au plus 40 %.

5. Échantillons et variable aléatoire moyenne

■ DÉFINITION :

Soit X une variable aléatoire et $n \geq 1$ un entier. On appelle **échantillon de taille n** un n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires **indépendantes**, ayant toutes la même loi que X (*i.i.d.* : indépendantes et identiquement distribuées). On pose :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

et

$$M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

M_n est la **variable aléatoire moyenne** de l'échantillon.

■ THÉORÈME :

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$E(S_n) = n \times E(X) \quad V(S_n) = n \times V(X)$$

$$E(M_n) = E(X) \quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$$

Démonstration.

Remarque : La variance de M_n est n fois plus petite que celle de X . Plus l'échantillon est grand, plus M_n est concentrée autour de $E(X)$: c'est l'intuition de la loi des grands nombres.

6. L'inégalité de concentration

■ THÉORÈME :

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, et $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon i.i.d. de X . On note $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

Pour tout réel $a > 0$:

$$p(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{n a^2}$$

Cette inégalité s'appelle **inégalité de concentration**.

Remarque : À précision a fixée, le majorant $\frac{V(X)}{n a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En augmentant la taille de l'échantillon, on peut rendre la probabilité d'un grand écart aussi petite que l'on veut.

Démonstration guidée.

Étape 1. Rappeler $E(M_n)$ et $V(M_n)$ (résultats du paragraphe 5).

$$E(M_n) = E(X) \quad \text{et} \quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$$

Étape 2. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable M_n puis conclure.

$$p(|M_n - E(M_n)| \geq a) \leq \frac{V(M_n)}{a^2} = \frac{V(X)/n}{a^2} = \frac{V(X)}{n a^2}.$$

Comme $E(M_n) = E(X)$, on obtient bien l'inégalité de concentration. $\square$

Exemple : Trouver la taille minimale d'échantillon

On lance une pièce équilibrée en série. Soit $X_i = 1$ si Pile, 0 si Face ; $E(X_i) = \frac{1}{2}$, $V(X_i) = \frac{1}{4}$. M_n est la proportion de Pile obtenue. Quelle taille d'échantillon n garantit, au risque 5 %, que M_n s'écarte de $\frac{1}{2}$ de moins de 0,01 ?

On cherche n tel que $p(|M_n - \frac{1}{2}| \geq 0,01) \leq 0,05$.

L'inégalité de concentration donne le majorant

$$\frac{1/4}{n \times (0,01)^2} = \frac{2500}{n}.$$

On impose $\frac{2500}{n} \leq 0,05$, soit $n \geq \frac{2500}{0,05} = 50\,000$.

Il faut au moins **50 000** lancers.

7. Loi des grands nombres

■ THÉORÈME :

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, et (X_i) un échantillon i.i.d. On pose $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

Pour tout réel $a > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$$

On dit que M_n **converge en probabilité** vers $E(X)$.

Ce résultat s'appelle **loi des grands nombres**.

Démonstration.

D'après l'inégalité de concentration :

$$0 \leq p(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(X)}{na^2} = 0$ (car $V(X)$ et a sont fixés).

Par le **théorème des gendarmes** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|M_n - E(X)| \geq a) = 0. \quad \square$$

8. Bilan

Inégalité	Hypothèses	Résultat
Markov	$X \geq 0$, $E(X)$ connu	$p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$
Bienaymé-Tchebychev	$E(X)$ et $V(X)$ connus	$p(X - E(X) \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$
Concentration	Échantillon i.i.d. taille n	$p(M_n - E(X) \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}$
Loi des grands nombres	Idem, $n \rightarrow +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(M_n - E(X) \geq a) = 0$

Remarque : Quelle inégalité choisir ?

- X positive, seule l'espérance est connue $\rightarrow$ **Markov**.
- X quelconque, écart à la moyenne, espérance et variance connues $\rightarrow$ **Bienaymé-Tchebychev**.
- Moyenne M_n d'un échantillon de taille n $\rightarrow$ **Concentration**.
- Comportement quand $n \rightarrow +\infty$ $\rightarrow$ **Loi des grands nombres**.

Remarques :

1. Ce théorème **fonde** l'interprétation fréquentiste des probabilités : la fréquence observée d'un événement, sur un grand nombre d'expériences indépendantes, converge vers sa probabilité.
2. Pour estimer $E(X)$ quand la loi est inconnue, on peut répéter l'expérience un grand nombre de fois et calculer la **moyenne empirique** M_n .
3. La loi des grands nombres ne dit **pas** que $M_n = E(X)$ à partir d'un certain rang ; elle dit seulement que la probabilité d'un grand écart tend vers 0.

Exemple : Visualisation

On lance un dé équilibré ($E(X) = 3,5$). La courbe ci-dessous (simulation) montre l'évolution de M_n en fonction de n : les fluctuations initiales s'atténuent, et M_n se stabilise autour de 3,5.

[Insérer ici une simulation GeoGebra ou Python : tracé de M_n pour n de 1 à 1 000.]

On observe que plus n est grand, plus M_n reste dans un voisinage étroit de 3,5, ce que garantit précisément la loi des grands nombres.

Exercice 1

1. Dans un immeuble, un ascenseur reste en moyenne 2 min au rez-de-chaussée avant d'être rappelé. Majorer la probabilité qu'il y reste plus de 5 min.
2. La glycémie moyenne d'une population est 1,1 g/L, toujours positive. Majorer la probabilité qu'une personne ait une glycémie supérieure à 2,2 g/L.
3. Soit X une variable aléatoire positive ou nulle avec $E(X) = 4$. Montrer que l'inégalité de Markov n'apporte rien pour $a = 3$.

1. $p(T \geq 5) \leq \frac{2}{5} = 0,4$.

2. $p(G \geq 2,2) \leq \frac{1,1}{2,2} = \frac{1}{2}$.

3. $\frac{E(X)}{a} = \frac{4}{3} > 1$: le majorant est supérieur à 1, ce qui est automatiquement vrai pour toute probabilité. L'inégalité est triviale.

Exercice 2

1. La taille moyenne des hommes est 170 cm, de variance 7,2. Jean mesure 165 cm, Paul mesure 175 cm. Majorer la probabilité qu'un homme soit plus petit que Jean ou plus grand que Paul.
2. Dans une usine, la production journalière a espérance 50 pièces et variance 25.
 - (a) Majorer $p(X \geq 75)$ via l'inégalité de Markov.
 - (b) Majorer $p(|X - 50| \geq 25)$ via Bienaymé-Tchebychev. Comparer les deux résultats.
3. La moyenne des notes d'un lycée est 11,4, de variance 1,2. Minorer la probabilité qu'un élève ait une note strictement comprise entre 9 et 13,8.

1. $p(|X - 170| \geq 5) \leq \frac{7,2}{25} = 0,288$, soit au plus 28,8 %.

2. (a) Markov : $p(X \geq 75) \leq \frac{50}{75} = \frac{2}{3} \approx 66,7\%$.

(b) B.-T. : $p(|X - 50| \geq 25) \leq \frac{25}{625} = \frac{1}{25} = 4\%$. La borne B.-T. est bien meilleure.

3. $p(|X - 11,4| \geq 2,4) \leq \frac{1,2}{5,76} = \frac{5}{24}$. Donc $p(9 < X < 13,8) \geq 1 - \frac{5}{24} = \frac{19}{24} \approx 79,2\%$.

Exercice 3

- On effectue n tirages avec remise d'une carte dans un jeu de 52. On pose $X_i = 1$ si la carte tirée est un pique, 0 sinon.
 - Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
 - Quelle valeur minimale de n garantit, au risque de 5 %, que la proportion de piques s'écarte de son espérance de moins de 0,1 ?
- Le nombre de buts d'une équipe par match a espérance 2 et variance 1,5. À partir de combien de matchs peut-on être sûr, au risque de 1 %, que la moyenne de buts est comprise entre 1,5 et 2,5 ?

- $E(X_i) = \frac{1}{4}$; $V(X_i) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$.
 - $\frac{3/16}{n(0,1)^2} \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{3/16}{0,005} = \frac{3}{0,08} = 37,5$, donc $n \geq 38$.
- $p(|M_n - 2| \geq 0,5) \leq 0,01$ donne $\frac{1,5}{n \times 0,25} \leq 0,01$, soit $n \geq 600$.

Exercice 4

On considère 10 variables aléatoires i.i.d. dont la loi commune est :

x_i	-5	0	1	3
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

On pose $S_{10} = X_1 + \dots + X_{10}$ et $M_{10} = \frac{S_{10}}{10}$.

- Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
 - En déduire $E(S_{10})$, $V(S_{10})$, $E(M_{10})$, $V(M_{10})$.
- $E(X) = (-5)(0,4) + 0 + (1)(0,2) + (3)(0,1) = -2 + 0,2 + 0,3 = -1,5$.
 $E(X^2) = 25(0,4) + 0 + 1(0,2) + 9(0,1) = 10,9 + 0,2 = 11,1$.
 $V(X) = 11,1 - (-1,5)^2 = 11,1 - 2,25 = 8,85$.
 - $E(S_{10}) = -15$; $V(S_{10}) = 88,5$; $E(M_{10}) = -1,5$; $V(M_{10}) = 0,885$.

Exercice 5

- On lance 800 fois une pièce équilibrée. Soit X le nombre de Pile obtenus.
 - Rappeler la loi de X , son espérance et sa variance.
 - Minorer la probabilité que le nombre de Pile soit compris entre 381 et 419.
 - Une lanceuse de fléchettes réussit « dans le mille » avec probabilité 0,6. Sur 20 lancers, elle prédit obtenir entre 10 et 14 succès.
 - Quelle loi suit M , le nombre de lancers dans le mille ?
 - Donner l'espérance et la variance de M .
 - Minorer la probabilité qu'elle ait raison, ou montrer que B.-T. ne donne pas de borne utile.
- $X \sim \mathcal{B}(800; 0,5)$; $E(X) = 400$; $V(X) = 200$.
 - $p(381 \leq X \leq 419) = p(|X - 400| \leq 19)$.
B.-T. : $p(|X - 400| \geq 19) \leq \frac{200}{361} \approx 0,554$.
Donc $p(381 \leq X \leq 419) \geq 1 - \frac{200}{361} = \frac{161}{361} \approx 44,6 \%$.
 - $M \sim \mathcal{B}(20; 0,6)$.
 - $E(M) = 12$; $V(M) = 20 \times 0,6 \times 0,4 = 4,8$.

(c) On cherche $p(10 < M < 14) = p(|M - 12| < 2)$.

B.-T. : $p(|M - 12| \geq 2) \leq \frac{4,8}{4} = 1,2 > 1$.

Le majorant est supérieur à 1 : **B.-T. ne donne pas de borne utile ici** (le seuil $a = 2$ est trop proche de l'écart-type $\sigma \approx 2,19$).