

Contrôle n° 7 : Arithmétique, translations et fonctions linéaires

• Jeudi 4 avril 2024 •

Matériel : calculatrice autorisée, mais toutes les étapes de calculs doivent être justifiées.

Consigne : Rendre ce sujet avec la copie double.

Nom :

Prénom :

Classe : 3^e A

Exercice n° 1 : Vrai ou Faux (4 points)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant soigneusement les résultats sur la copie.

1. La fonction $f : x \mapsto (5x + 3)^2 - 5(5x - 1)(4 + x)$ est-elle linéaire ?

$$\begin{aligned} f(x) &= (5x + 3)^2 - 5(5x - 1)(4 + x) \\ &= 25x^2 + 30x + 9 - 5(20x + 5x^2 - 4 - x) \\ &= 25x^2 + 30x + 9 - 100x - 25x^2 + 20 + 5x \\ &= -65x + 29 \end{aligned}$$

Donc la fonction f n'a pas l'air d'être une fonction linéaire (c'est, en revanche, une fonction affine).
Montrons-le grâce au cours :

$f(0) = -65 \times 0 + 29 = 29$. Donc $f(0) \neq 0$. Donc f n'est pas une fonction linéaire.

2. Si un nombre entier naturel est divisible par 4, alors il est divisible par 2.

Soit n un nombre entier naturel divisible par 4.

Ainsi il existe k un entier naturel tel que $n = 4k$

Or $n = 2 \times 2k$

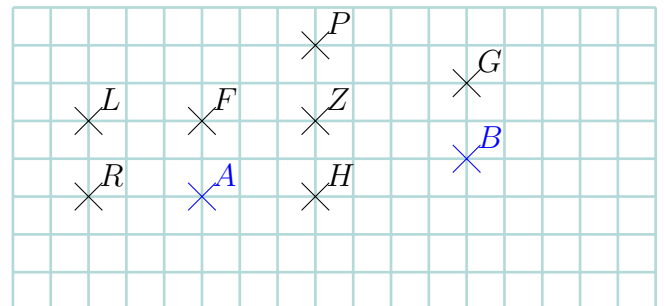
Donc n est divisible par 2.

Exercice n° 2 : Translations (4 points)

Sur le quadrillage ci-contre :

1. Construire le point A , image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{PZ}$.

2. Construire le point B , image de H par la translation qui transforme Z en G .



3. Compléter les pointillés dans la phrase suivante :

Le quadrilatère $LFAR$ est l'image du quadrilatère $FZHA$ par la translation qui transforme le point Z sur le point F

4. Que peut-on dire de l'aire du quadrilatère $LZHR$ par rapport à l'aire du quadrilatère $FZHA$? Justifier la réponse sur la copie, sans oublier de citer une propriété du cours pour démontrer le résultat.

D'après la question 3., $LFAR$ est l'image du quadrilatère $FZHA$ par une translation.

Or, une translation conserve les aires.

Donc l'aire du quadrilatère $LFAR$ est la même que celle du quadrilatère $FZHA$.

On en conclut que l'aire du quadrilatère $LZHR$ est le double de celle du quadrilatère $FZHA$.

Exercice n° 3 : Arithmétique (5 points)

- Décomposer les nombres 162 et 108 en produits de facteurs premiers, en justifiant.
 $162 = 2 \times 81$, donc $162 = 2 \times 3^4$
 $108 = 2 \times 54 = 2 \times 2 \times 27$, donc $108 = 2^2 \times 3^3$.
- Déterminer deux diviseurs communs aux nombres 162 et 108 plus grands que 10.
 $18 = 2 \times 3 \times 3$ et $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$ sont deux diviseurs communs à 162 et 108 et ils sont plus grands que 10.
- Un snack vend des barquettes composées de nems et de samossas. Le cuisinier a préparé 162 nems et 108 samossas. Dans chaque barquette :
 - le nombre de nems doit être le même
 - le nombre de samossas doit être le même

Tous les nems et tous les samossas doivent être utilisés.

- Le cuisinier peut-il réaliser 36 barquettes ?
 36 n'est pas un diviseur de 162, donc le cuisinier ne peut pas réaliser 36 barquettes.
- Quel nombre maximal de barquettes pourra-t-il réaliser ?
Il pourra utiliser au maximum $PGCD(162, 108)$ barquettes, c'est-à-dire 54 barquettes.
- Dans ce cas, combien y aura-t-il de nems et de samossas dans chaque barquette ?
Dans chaque barquette, il y aura alors $\frac{162}{54} = 3$ nems et $\frac{108}{54} = 2$ samossas.

Exercice n° 4 : Fonctions, Tableur et Équations (7 points)

Une association propose diverses activités pour occuper les enfants pendant les vacances scolaires. Plusieurs tarifs sont proposés :

- Tarif A : 8 € par demi-journée
- Tarif B : une adhésion de 30 € donnant droit à un tarif préférentiel de 5 € par demi-journée

Un fichier sur tableur a été préparé pour calculer le prix à payer en fonction du nombre de demi-journées d'activités pour chacun des tarifs proposés :

	A	B	C	D	E	F
1	Nombre de demi-journées	1	2	3	4	5
2	Tarif A	8	16	24	32	40
3	Tarif B	35	40	45	50	55

- Compléter le tableau précédent, en écrivant les valeurs correspondantes sur les pointillés.
- Indiquer, sur la copie, la formule qui a été saisie dans la cellule B3 avant de l'étirer vers la droite.
On a écrit en B3 la formule « $= 30 + 5 * B1$ »

3. On considère les fonctions f et g qui donnent les tarifs en fonction du nombre x de demi-journées d'activités :

- Tarif A : $f(x) = 8x$
- Tarif B : $g(x) = 30 + 5x$

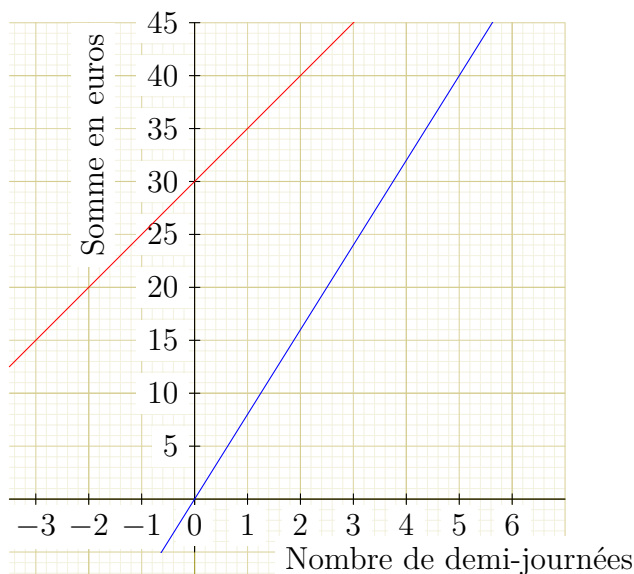
Parmi ces fonctions, quelle est celle qui traduit une situation de proportionnalité ? Justifier.

On sait que, si une fonction est linéaire, alors elle traduit une situation de proportionnalité.

Or, f est une fonction linéaire.

Donc la fonction f traduit une situation de proportionnalité.

4. Sur le graphique suivant, on a représenté la fonction g . Représenter sur ce même graphique la fonction f .



5. Déterminer le nombre de demi-journées d'activités pour lequel le tarif A est égal au tarif B. Détailler les calculs.

On cherche x tel que $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire $8x = 30 + 5x$, ou encore $3x = 30$, c'est-à-dire $x = 10$.

Donc, pour 10 demi-journées, le tarif A est égal au tarif B.

6. Avec un budget de 100 €, déterminer le nombre maximal de demi-journées auxquelles on peut participer. Décrire la méthode choisie.

On a

$$\begin{aligned} 8x = 100 & \iff x = \frac{100}{8} \\ & \iff x = 12,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30 + 5x = 100 & \iff 5x = 70 \\ & \iff x = 14 \end{aligned}$$

Avec un budget maximal de 100 euros, on peut participer à 12 demi-journées avec le tarif A (et il reste un peu d'argent...) et à 14 demi-journées avec le tarif B.

On peut donc participer à 14 demi-journées au maximum.

Bonus 1

Démontrer qu'il n'y a aucun nombre premier dont la somme des chiffres est égale à 18.

Indication : on pourra utiliser le critère de divisibilité par 3.

On rappelle le critère de divisibilité par 3 : un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Ici, si p est un nombre premier dont la somme des chiffres est 18, alors puisque 18 est divisible par 3, p est aussi divisible par 3.

Or, p est un nombre premier, donc $p = 3$.

Or, dans ce cas, la somme des chiffres vaut alors 3, et non 18.

Ainsi, il n'existe aucune nombre premier dont la somme des chiffres est égale à 18.

Bonus 2, plus difficile, pour occuper ceux qui ont fini

On considère un triangle rectangle dont les trois longueurs de côtés sont des entiers. L'un des côtés de l'angle droit a une longueur qui vaut un nombre premier impair p .

Quel est le périmètre de ce triangle en fonction de p ?

On considère un triangle rectangle ABC rectangle en B . Par hypothèse, $AB = p$, où p est un nombre premier impair.

Notons $BC = a$ et $AC = b$.

D'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned}a^2 + p^2 &= b^2 \\p^2 &= b^2 - a^2 \\p^2 &= (b - a)(b + a)\end{aligned}$$

Or, p est un nombre premier, donc p^2 est uniquement divisible par 1, p et p^2 . Ainsi :

- Premier cas : $b - a = 1$ et $b + a = p^2$. Puis qu'on cherche le périmètre de ABC , on cherche $\mathcal{P} = a + b + p$, et on obtient

$$\mathcal{P} = p^2 + p = p(p + 1)$$

- Deuxième cas : $b - a = p$ et $b + a = p$. Alors $b - a = b + a$, et donc $a = 0$, ce qui est impossible.
- Troisième cas : $b - a = p^2$ et $b + a = 1$. Ce cas est impossible, car $b - a > b + a$.

On en conclut que, nécessairement, $b - a = 1$ et $b + a = p^2$, et que le périmètre du triangle rectangle considéré est

$$\mathcal{P} = p(p + 1)$$