

Séquence XVI – Calculs avec les radicaux

Exercice 1

L'unité de longueur est le centimètre. $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 18$ et $AD = 6$. On appelle I le milieu du segment $[AB]$, J celui du segment $[AD]$ et $\mathcal{P}$ la valeur du périmètre du quadrilatère $DCIJ$.

1. Calculer $\mathcal{P}$
2. Voici quatre réponses d'élèves :

- (a) $21 + \sqrt{90} + \sqrt{117}$
- (b) $21 + \sqrt{207}$
- (c) $41,3$
- (d) $21 + 3(\sqrt{10} + \sqrt{13})$

Lesquelles sont correctes ?

Solution de l'exercice 1 Le périmètre du quadrilatère $DCIJ$ est la somme des longueurs de ses côtés : $\mathcal{P} = DC + CI + IJ + JD$

- $ABCD$ est un carré, donc $DC = AB = 18$ cm
- Dans le triangle ACI rectangle en A , d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} CI^2 &= 9^2 + 6^2 \\ &= 81 + 36 \\ &= 117 \end{aligned}$$

Or, CI est une longueur, donc CI est positif. Donc $CI = \sqrt{117}$ cm.

- Dans le triangle AIJ rectangle en A , d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} IJ^2 &= 9^2 + 3^2 \\ &= 81 + 9 \\ &= 90 \end{aligned}$$

Or, IJ est une longueur, donc IJ est positif. Donc $IJ = \sqrt{90}$ cm.

- J est le milieu de $[AD]$ et $AD = 6$ cm, donc $JD = 3$ cm.

On obtient donc :

$$\mathcal{P} = 18 + \sqrt{117} + \sqrt{90} + 3 = 21 + \sqrt{117} + \sqrt{90} \text{ cm}$$

On peut également remarquer que :

$$\begin{aligned} \sqrt{90} &= \sqrt{9 \times 10} = 3\sqrt{10} \\ \sqrt{117} &= \sqrt{9 \times 13} = 3\sqrt{13} \end{aligned}$$

On obtient donc aussi :

$$\mathcal{P} = 21 + 3\sqrt{10} + 3\sqrt{13} = 21 + 3(\sqrt{10} + \sqrt{13}) \text{ cm}$$

Les réponses A et D sont donc correctes.

Exercice 2

Donner l'écriture la plus simple des nombres suivants :

- $A = \sqrt{7^2} - \sqrt{3^2}$
- $B = \sqrt{7^2 - 3^2}$
- $C = (-4 + 2\sqrt{3})\sqrt{3}$
- $D = 2\sqrt{50} + 4\sqrt{72} + 4\sqrt{2}$
- $E = \sqrt{\frac{27}{5}} \times \sqrt{\frac{10}{3}}$
- $F = \frac{2\sqrt{7}}{3} + \frac{\sqrt{14}}{2}$
- $G = \sqrt{\frac{39}{7}} \div \sqrt{\frac{13}{7}}$
- $H = \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{54} + 28\sqrt{\frac{24}{49}}$

Solution de l'exercice 2

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{7^2} - \sqrt{3^2} \\ &= 7 - 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{7^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{49 - 9} \\ &= \sqrt{40} \\ &= \sqrt{4 \times 10} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (-4 + 2\sqrt{3})\sqrt{3} \\ &= -4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ &= -4\sqrt{3} + 2 \times 3 \\ &= -4\sqrt{3} + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 2\sqrt{50} + 4\sqrt{72} + 4\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{25 \times 2} + 4\sqrt{36 \times 2} + 4\sqrt{2} \\ &= 2 \times 5 \times \sqrt{2} + 4 \times 6 \times \sqrt{2} + 4\sqrt{2} \\ &= 10\sqrt{2} + 24\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \\ &= 38\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \sqrt{\frac{27}{5}} \times \sqrt{\frac{10}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{27 \times 10}{5 \times 3}} \\
&= \sqrt{\frac{270}{15}} \\
&= \sqrt{18} \\
&= \sqrt{9 \times 2} \\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \frac{2\sqrt{7}}{3} + \frac{\sqrt{14}}{2} \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{3} + \frac{\sqrt{2 \times 7}}{2} \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{3} + \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{2} \\
&= \frac{4\sqrt{7}}{6} + \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{6} \\
&= \frac{4\sqrt{7} + 3\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{6} \\
&= \frac{\sqrt{7}(4 + 3\sqrt{2})}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \sqrt{\frac{39}{7}} \div \sqrt{\frac{13}{7}} \\
&= \sqrt{\frac{39}{7} \times \frac{7}{13}} \\
&= \sqrt{\frac{39}{13}} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{54} + 28\sqrt{\frac{24}{49}} \\
&= \sqrt{6} - \sqrt{9 \times 6} + 28\sqrt{\frac{24}{49}} \\
&= \sqrt{6} - 3\sqrt{6} + 28 \times \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{49}} \\
&= -2\sqrt{6} + 28 \times \frac{\sqrt{4 \times 6}}{7} \\
&= -2\sqrt{6} + 28 \times \frac{2\sqrt{6}}{7} \\
&= -2\sqrt{6} + \frac{56\sqrt{6}}{7} \\
&= -2\sqrt{6} + 8\sqrt{6} \\
&= 6\sqrt{6}
\end{aligned}$$



Exercice 3

A , B et C sont trois points tels que $AB = 2\sqrt{5}$, $BC = 3\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{65}$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

Solution de l'exercice 3

Vérifions si le triangle ABC est rectangle en appliquant le théorème de Pythagore.

Si le triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse doit être égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Examinons les trois possibilités :

1. Si l'angle en A est droit :

- D'une part, $BC^2 = (3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$
- D'autre part,
 $AB^2 + AC^2 = (2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{65})^2 = 4 \times 5 + 65 = 85$

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle en A .

2. Si l'angle en C est droit :

- D'une part, $AB^2 = (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$
- D'autre part,
 $AC^2 + BC^2 = (\sqrt{65})^2 + (3\sqrt{5})^2 = 65 + 9 \times 5 = 110$

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle en C .

3. Si l'angle en B est droit :

- D'une part, $AC^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$
- D'autre part,

$$\begin{aligned}
AB^2 + BC^2 &= (2\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2 \\
&= 4 \times 5 + 9 \times 5 \\
&= 65
\end{aligned}$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle en B .



Exercice 4

Soit $a = 61\,917\,364\,224$.

Le nombre $\sqrt{a}$ est-il un nombre décimal ?

Solution de l'exercice 4

$$a = 61\,917\,364\,224 = 2^{20} \times 3^{10}$$

$$\sqrt{a} = 248832 = 2^{10} \times 3^5$$

Un nombre entier est décimal, donc $\sqrt{a}$ est un nombre entier.



Exercice 5

Sans calculatrice, calculer

$$\sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}}$$

Solution de l'exercice 5 Calculons cette expression de l'intérieur vers l'extérieur.

Commençons par l'expression la plus imbriquée :

$$\sqrt{1} = 1$$

Poursuivons en remontant :

$$\begin{aligned}\sqrt{3 + \sqrt{1}} &= \sqrt{3 + 1} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2\end{aligned}$$

Continuons :

$$\begin{aligned}\sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}} &= \sqrt{7 + 2} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3\end{aligned}$$

Poursuivons le calcul :

$$\begin{aligned}\sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}} &= \sqrt{13 + 3} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4\end{aligned}$$

Continuons :

$$\begin{aligned}\sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}} &= \sqrt{21 + 4} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

Poursuivons :

$$\begin{aligned}\sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}} &= \sqrt{31 + 5} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6\end{aligned}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}\sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}} &= \sqrt{43 + 6} \\ &= \sqrt{49} \\ &= 7\end{aligned}$$

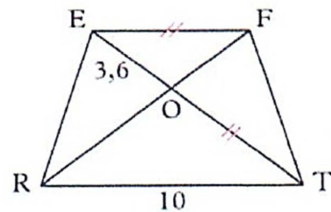
On remarque d'ailleurs une structure intéressante dans cette expression : à chaque étape n (en partant de $n = 1$ pour $\sqrt{1}$), la valeur obtenue est n et l'expression suivante contient $n^2 + 2n + 1 - n = n^2 + n + 1$ sous la racine avant d'ajouter la valeur précédente.

La réponse finale est donc 7.



Exercice 6

La figure ci-dessous, qui n'est pas en vraie grandeur, représente un trapèze $EFT R$ de bases $[EF]$ et $[TR]$



On sait que $EO = 3,6$ cm, $RT = 10$ cm et que $EF = OT$. On note x la longueur commune des segments $[EF]$ et $[OT]$. Calculer x .

Solution de l'exercice 6 On sait que EF est parallèle à TR car ce sont les bases du trapèze.

Donc, dans le triangle ETR , on peut appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{EO}{ET} = \frac{EF}{TR}.$$

On pose x la longueur commune des segments $[EF]$ et $[OT]$.

Alors $ET = EO + OT = 3,6 + x$, et $RT = 10$.

En remplaçant dans la relation de Thalès, on obtient :

$$\frac{3,6}{3,6 + x} = \frac{x}{10}.$$

On effectue un produit en croix :

$$\begin{aligned}3,6 \times 10 &= x(3,6 + x), \\ 36 &= 3,6x + x^2.\end{aligned}$$

On met tout dans le même membre :

$$x^2 + 3,6x - 36 = 0.$$

On va mettre ce trinôme sous la forme d'un carré à l'aide des identités remarquables.

On commence par rappeler l'identité remarquable :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

On cherche à écrire $x^2 + 3,6x$ comme le début d'un carré parfait.

Or :

$$x^2 + 3,6x = x^2 + 2 \times x \times 1,8.$$

Donc, on complète avec $1,8^2 = 3,24$ pour obtenir le carré parfait :

$$x^2 + 3,6x + 3,24 = (x + 1,8)^2.$$

Mais attention : pour ne pas changer l'expression de départ, on doit aussi retirer ce qu'on a ajouté :

$$x^2 + 3,6x - 36 = (x + 1,8)^2 - 3,24 - 36,$$

$$x^2 + 3,6x - 36 = (x + 1,8)^2 - 39,24.$$

On résout maintenant l'équation :

$$(x + 1,8)^2 - 39,24 = 0,$$

$$(x + 1,8)^2 = 39,24.$$

On prend la racine carrée des deux côtés (et on garde uniquement la solution positive car x est une longueur) :

$$x + 1,8 = \sqrt{39,24},$$

$$x = \sqrt{39,24} - 1,8,$$

Conclusion : La longueur commune des segments $[EF]$ et $[OT]$ est environ $\boxed{\sqrt{39,24} - 1,8 \text{ cm}}$.



Exercice 7

Résoudre les équations suivantes :

- $x\sqrt{18} = x\sqrt{50} + 7\sqrt{2}$
- $2x - 3\sqrt{2} = x\sqrt{2} + \sqrt{2} - 8$
- $x^2 = 5 - \sqrt{51}$
- $(x + 1)^2 = 3$
- $(3 - x)^2 = \pi$
- $2(x - 3)^2 + 1 = 0$

Solution de l'exercice 7

1. Résoudre $x\sqrt{18} = x\sqrt{50} + 7\sqrt{2}$

$$x\sqrt{18} - x\sqrt{50} = 7\sqrt{2} \iff x(\sqrt{18} - \sqrt{50}) = 7\sqrt{2}$$

$$\text{Or, } \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2} \text{ et } \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

Donc

$$x\sqrt{18} - x\sqrt{50} = 7\sqrt{2} \iff x(3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}) = 7\sqrt{2}$$

$$\iff x(-2\sqrt{2}) = 7\sqrt{2}$$

$$\iff x = \frac{7\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}$$

$$\iff x = -\frac{7}{2}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{2}\right\}}.$$

2. Résoudre $2x - 3\sqrt{2} = x\sqrt{2} + \sqrt{2} - 8$

$$2x - x\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} - 8 \iff 2x - x\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 8$$

$$\iff x(2 - \sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 8$$

$$\iff x = \frac{4\sqrt{2} - 8}{2 - \sqrt{2}}$$

On simplifie en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué $2 + \sqrt{2}$:

$$x = \frac{(4\sqrt{2} - 8)(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}$$

$$x = \frac{(4\sqrt{2} \times 2 + 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 8 \times 2 - 8 \times \sqrt{2})}{4 - 2}$$

$$x = \frac{(8\sqrt{2} + 8 - 16 - 8\sqrt{2})}{2}$$

$$x = \frac{-8}{2}$$

$$x = -4$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\mathcal{S} = \{-4\}}.$$

3. Résoudre $x^2 = 5 - \sqrt{51}$

Or, $5 = \sqrt{25}$, donc $5 - \sqrt{51} < 0$ donc $x^2 < 0$, ce qui est impossible pour un réel.

$$\text{Donc, } \boxed{\mathcal{S} = \emptyset}.$$

4. Résoudre $(x + 1)^2 = 3$

$$(x + 1)^2 = 3 \iff (x + 1)^2 - 3 = 0$$

$$\iff (x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3}) = 0$$

Or, un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Ainsi :

$$x + 1 - \sqrt{3} = 0 \quad \text{ou} \quad x + 1 + \sqrt{3} = 0$$

$$x = \sqrt{3} - 1 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{3} - 1$$

$$\text{Donc } \boxed{\mathcal{S} = \{\sqrt{3} - 1 ; -\sqrt{3} - 1\}}.$$

5. Résoudre $(3 - x)^2 = \pi$

$$(3 - x)^2 = \pi \iff (3 - x)^2 - \pi = 0$$

$$\iff (3 - x - \sqrt{\pi})(3 - x + \sqrt{\pi}) = 0$$

Or, un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Ainsi :

$$3 - x - \sqrt{\pi} = 0 \quad \text{ou} \quad 3 - x + \sqrt{\pi} = 0$$

$$-x = -3 + \sqrt{\pi} \quad \text{ou} \quad -x = -3 - \sqrt{\pi}$$

$$x = 3 - \sqrt{\pi} \quad \text{ou} \quad x = 3 + \sqrt{\pi}$$

$$\text{Donc } \boxed{\mathcal{S} = \{3 - \sqrt{\pi} ; 3 + \sqrt{\pi}\}}.$$

6. Résoudre $2(x-3)^2 + 1 = 0$

On commence par isoler $(x-3)^2$:

$$2(x-3)^2 + 1 = 0$$

$$2(x-3)^2 = -1$$

$$(x-3)^2 = -\frac{1}{2}$$

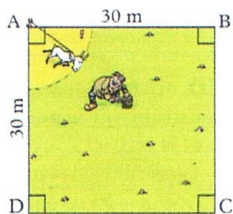
Or $(x-3)^2$ est un carré donc ne peut pas être négatif.

Ainsi, $\boxed{S = \emptyset}$.



Exercice 8

Quelle longueur faut-il donner à la corde afin que la chèvre ne puisse brouter que la moitié de la superficie de son enclos ?



Solution de l'exercice 8

D'après l'énoncé, nous avons un enclos carré $ABCD$ de côté 30 m. Une chèvre est attachée à un piquet situé en un coin de l'enclos (le point A). On cherche la longueur de la corde pour que la chèvre puisse brouter exactement la moitié de la superficie de son enclos.

La superficie totale de l'enclos est :

$$S_{\text{enclos}} = 30 \times 30 = 900 \text{ m}^2$$

La moitié de cette superficie est donc :

$$S_{\text{broutable}} = \frac{900}{2} = 450 \text{ m}^2$$

Lorsque la chèvre est attachée au point A avec une corde de longueur r , elle peut se déplacer dans un quart de disque de rayon r (car elle est contrainte par les deux côtés de l'enclos qui forment un angle droit).

L'aire de ce quart de disque est :

$$S_{\text{quart}} = \frac{1}{4} \times \pi \times r^2$$

Si la corde est plus longue que la largeur de l'enclos (30 m), la chèvre pourra atteindre les côtés opposés, et la zone accessible ne sera plus un simple quart de disque. Pour simplifier, supposons d'abord que $r \leq 30$.

On veut alors $S_{\text{quart}} = S_{\text{broutable}}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{4} \times \pi \times r^2 = 450$$

$$\pi \times r^2 = 1800$$

$$r^2 = \frac{1800}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{1800}{\pi}} \text{ car } r \text{ est une longueur.}$$

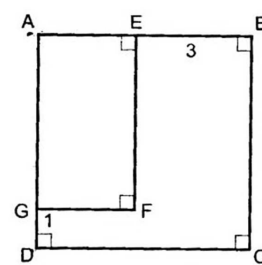
$$r \approx 23,92 \text{ m}$$

Vérifions que cette valeur de r est bien inférieure à 30 m : $23,92 < 30$, donc notre hypothèse était correcte.



Exercice 9

L'unité de longueur est le centimètre. Le quadrilatère $ABCD$ ci-contre est un carré de côté x . Le point E appartient au segment $[AB]$ et le point G appartient au segment $[AD]$ et le point F est tel que $AGFE$ est un rectangle.



On sait que $BE = 3$ et que $DG = 1$.

1. Calculer les longueurs AE et AG en fonction de x . Montrer que l'aire du rectangle $AGFE$ est $S = x^2 - 4x + 3$
2. Calculer S lorsque $x = 3$ puis lorsque $x = 2 + \sqrt{2}$
3. Pour quelle valeur de x l'aire S vaut-elle 3 ?
4. Développer $(x-8)(x+4)$. En déduire la valeur de S telle que $S = 35$.

Solution de l'exercice 9 1. Calculons les longueurs AE et AG en fonction de x .

Le quadrilatère $ABCD$ est un carré de côté x . On sait que le point E appartient au segment $[AB]$ et que $BE = 3$. On en déduit que $AE = AB - BE = x - 3$. On sait que le point G appartient au segment $[AD]$ et que $DG = 1$. On en déduit que $AG = AD - DG = x - 1$. Calculons maintenant l'aire du rectangle $AGFE$.

L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa longueur par sa largeur :

$$\begin{aligned} S &= AE \times AG \\ &= (x-3) \times (x-1) \end{aligned}$$

Développons cette expression :

$$\begin{aligned} S &= (x-3) \times (x-1) \\ &= x^2 - x - 3x + 3 \\ &= x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

L'aire du rectangle $AGFE$ est donc $S = x^2 - 4x + 3$.

2. Calculons S pour $x = 3$ puis pour $x = 2 + \sqrt{2}$.

Pour $x = 3$:

$$\begin{aligned} S &= 3^2 - 4 \times 3 + 3 \\ &= 9 - 12 + 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'aire vaut 0 cm² lorsque $x = 3$. Cela signifie que le rectangle est dégénéré (réduit à un segment ou à un point) quand le côté du carré mesure 3 cm.

Pour $x = 2 + \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} S &= (2 + \sqrt{2})^2 - 4(2 + \sqrt{2}) + 3 \\ &= 4 + 4\sqrt{2} + 2 - 8 - 4\sqrt{2} + 3 \\ &= 4 + 2 - 8 + 3 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'aire vaut 1 cm² lorsque $x = 2 + \sqrt{2}$.

3. Cherchons pour quelle valeur de x l'aire S vaut 3.

Nous devons résoudre l'équation :

$$x^2 - 4x + 3 = 3$$

Simplifions :

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= 0 \\ x(x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

On obtient donc $x = 0$ ou $x = 4$.

Comme x représente la longueur du côté d'un carré, x doit être strictement positif. Donc $x = 4$ est la seule solution acceptable.

L'aire S du rectangle $AGFE$ vaut 3 cm² lorsque le côté du carré mesure 4 cm.

4. Développons $(x - 8)(x + 4)$.

$$\begin{aligned} (x - 8)(x + 4) &= x^2 + 4x - 8x - 32 \\ &= x^2 - 4x - 32 \end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de S telle que $S = 35$, nous devons résoudre l'équation :

$$x^2 - 4x + 3 = 35$$

Réorganisons :

$$x^2 - 4x - 32 = 0$$

On remarque que cette équation est équivalente à $(x - 8)(x + 4) = 0$, que nous venons de développer.

Donc les solutions sont $x = 8$ ou $x = -4$.

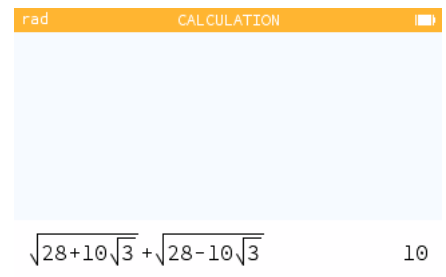
Comme x représente la longueur du côté d'un carré, x doit être strictement positif. La seule solution possible est donc $x = 8$.

L'aire S du rectangle $AGFE$ vaut 35 cm² lorsque le côté du carré mesure 8 cm.

Exercice 10

Soit le nombre $A = \sqrt{28 + 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$.

1. Voici l'affichage de la calculatrice.



Que pensez-vous de ce résultat ?

2. En remarquant que

$$28 + 10\sqrt{3} = 25 + 3 + 10\sqrt{3}$$

écrire $28 + 10\sqrt{3}$ sous la forme $(a + b)^2$, où a et b sont deux nombres à préciser. En déduire une expression simplifiée de $\sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$.

3. Procéder de même pour $28 - 10\sqrt{3}$.

4. En déduire la valeur de A .

Solution de l'exercice 10

1. L'affichage de la calculatrice indique que

$$A = \sqrt{28 + 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = 10$$

Ce résultat semble suspect car l'expression contient des radicaux imbriqués complexes, et la réponse est un nombre entier simple. Cela suggère qu'une simplification importante est possible, ce que nous allons vérifier dans les questions suivantes.

2. On cherche à écrire $28 + 10\sqrt{3}$ sous la forme $(a + b)^2$.

$$\text{Développons } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Si on compare avec $28 + 10\sqrt{3} = 25 + 3 + 10\sqrt{3}$, on peut essayer d'identifier :

$$a^2 = 25$$

$$b^2 = 3$$

$$2ab = 10\sqrt{3}$$

De la première équation, on déduit $a = 5$. **argument de positivité difficile... à exclure ?** De la deuxième équation, on déduit $b = \sqrt{3}$.

Vérifions la troisième condition : $2ab = 2 \times 5 \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$. C'est bien cohérent.

$$\text{Donc } 28 + 10\sqrt{3} = (5 + \sqrt{3})^2$$

Par conséquent, $\sqrt{28 + 10\sqrt{3}} = 5 + \sqrt{3}$

3. Procédons de même pour $28 - 10\sqrt{3}$.

On cherche à l'écrire sous la forme $(c + d)^2$.

Si on développe, on a $(c + d)^2 = c^2 + 2cd + d^2$

En comparant avec $28 - 10\sqrt{3} = 25 + 3 - 10\sqrt{3}$, on peut identifier :

$$c^2 = 25$$

$$d^2 = 3$$

$$2cd = -10\sqrt{3}$$

De la première équation, on déduit $c = 5$. De la deuxième équation, on déduit $|d| = \sqrt{3}$, donc $d = \pm\sqrt{3}$.

Pour la troisième condition : si $d = \sqrt{3}$, alors $2cd = 2 \times 5 \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3} \neq -10\sqrt{3}$. Si $d = -\sqrt{3}$, alors $2cd = 2 \times 5 \times (-\sqrt{3}) = -10\sqrt{3}$. Cette valeur convient.

$$\text{Donc } 28 - 10\sqrt{3} = (5 - \sqrt{3})^2$$

$$\text{Par conséquent, } \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = 5 - \sqrt{3}$$

4. On peut maintenant calculer la valeur de A :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{28 + 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} \\ &= (5 + \sqrt{3}) + (5 - \sqrt{3}) \\ &= 10 \end{aligned}$$

La valeur affichée par la calculatrice, c'est-à-dire 10, est donc correcte. .

Exercice 11

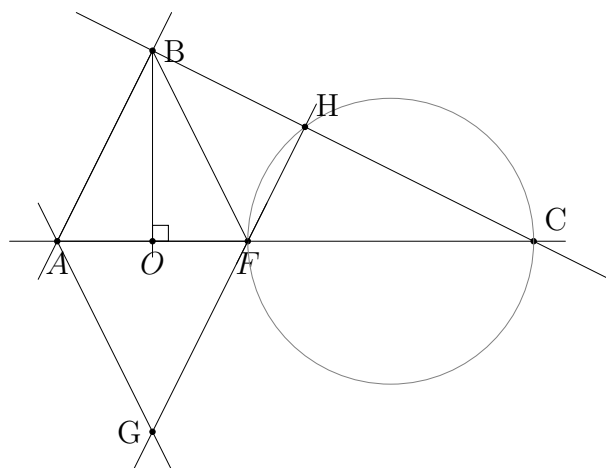
L'unité de longueur est le centimètre. Soient A , O , F et C quatre points alignés dans cet ordre tels que : $AO = OF = 3$ et $AC = 15$

La droite (BO) est perpendiculaire à la droite (AC) et $BO = 6$.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.
3. Le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[FC]$ recoupe la droite (BC) en H . Montrer que les droites (AB) et (FH) sont parallèles.
4. Calculer CF et CH .
5. Montrer que le triangle BAF est isocèle.
6. La parallèle à la droite (BF) passant par A coupe la droite (HF) en G .
Démontrer que le quadrilatère $ABFG$ est un losange. Quel est son périmètre ?
7. Démontrer que le triangle OBC et le losange $ABFG$ ont même aire.

Solution de l'exercice 11

1. Figure



2. Démontrons que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

Utilisons le théorème de Pythagore dans le triangle AOB rectangle en O :

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$

$$AB^2 = 3^2 + 6^2$$

$$AB^2 = 9 + 36$$

$$AB^2 = 45$$

$$AB = 3\sqrt{5}$$

De même, dans le triangle BOC rectangle en O :

$$BC^2 = BO^2 + OC^2$$

$$BC^2 = 6^2 + 12^2$$

$$BC^2 = 36 + 144$$

$$BC^2 = 180$$

$$BC = 6\sqrt{5}$$

Dans le triangle ABC , calculons AC :

$$AC = AO + OC$$

$$AC = 3 + 12$$

$$AC = 15$$

Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle ABC :

$$AB^2 + BC^2 = (3\sqrt{5})^2 + (6\sqrt{5})^2$$

$$= 9 \times 5 + 36 \times 5$$

$$= 45 + 180$$

$$= 225$$

$$= 15^2$$

$$= AC^2$$

Donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$, ce qui signifie que le triangle ABC est rectangle en B d'après la réciproque du théorème de Pythagore. Ainsi, les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

3. Montrons que les droites (AB) et (FH) sont parallèles.

Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour diamètre $[FC]$. Un angle inscrit dans un demi-cercle est droit, donc le triangle FHC est rectangle en H .

Les triangles ABC et FHC ont :

- l'angle en C commun
- l'angle en B et l'angle en H sont tous deux droits

Donc les triangles ABC et FHC sont semblables (par cas d'égalité des angles). Cette similitude implique que :

$$\frac{AB}{FH} = \frac{AC}{FC}$$

De plus, les angles correspondants dans des triangles semblables sont égaux, donc les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{HFC}$ sont égaux.

Par conséquent, les droites (AB) et (FH) sont parallèles.

4. Calculons CF et CH .

Nous avons :

$$\begin{aligned} CF &= OC - OF \\ &= 12 - 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Pour calculer CH , utilisons le fait que le triangle FHC est rectangle en H . Le centre I du cercle $(\mathcal{C})$ est le milieu de $[FC]$, donc

$$FI = IC = \frac{9}{2} = 4,5$$

Dans le triangle FHC rectangle en H , on peut utiliser la relation dans le cercle : $FH \times HC = HI^2$, qui est une conséquence du théorème de l'angle inscrit.

D'autre part, le point H est sur la droite (BC) qui a pour coefficient directeur $\frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$. L'équation de cette droite est $y = -\frac{1}{2}x + 6$.

Le centre I du cercle a pour coordonnées $(7, 5; 0)$.

En remplaçant x par 6 dans l'équation de la droite, on trouve la coordonnée y de H :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} \times 6 + 6 \\ &= -3 + 6 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc H a pour coordonnées $(6; 3)$.

La distance CH est alors :

$$\begin{aligned} CH^2 &= (12 - 6)^2 + (0 - 3)^2 \\ &= 36 + 9 \\ &= 45 \\ CH &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

5. Montrons que le triangle BAF est isocèle.

Calculons BF : Dans le triangle BOF rectangle en O , on a :

$$\begin{aligned} BF^2 &= BO^2 + OF^2 \\ BF^2 &= 6^2 + 3^2 \\ BF^2 &= 36 + 9 \\ BF^2 &= 45 \\ BF &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Or, nous avons déjà calculé $AB = 3\sqrt{5}$.

Comme $AB = BF$, le triangle BAF est isocèle en B .

6. Démontrons que le quadrilatère $ABFG$ est un losange et calculons son périmètre.

La droite parallèle à (BF) passant par A coupe (HF) en G . Comme $(AB) \parallel (FH)$ d'après la question 3, et $(AG) \parallel (BF)$ par construction, le quadrilatère $ABFG$ a ses côtés opposés parallèles, c'est donc un parallélogramme.

De plus, nous avons montré que $AB = BF = 3\sqrt{5}$.

Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux, donc $AF = BG$.

De plus, comme $AB = BF$, on a aussi

$$AF = BG = 3\sqrt{5}$$

Un parallélogramme dont tous les côtés sont égaux est un losange. Donc $ABFG$ est un losange.

Le périmètre du losange $ABFG$ est :

$$\begin{aligned} P &= 4 \times 3\sqrt{5} \\ &= 12\sqrt{5} \\ &\approx 26,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

7. Démontrons que le triangle OBC et le losange $ABFG$ ont même aire.

L'aire du triangle OBC est :

$$\mathcal{A}_{OBC} = \frac{1}{2} \times OB \times OC = \frac{1}{2} \times 6 \times 12 = 36 \text{ cm}^2$$

L'aire du losange $ABFG$ peut être calculée en utilisant la formule

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

où d_1 et d_2 sont les longueurs des diagonales.

Les diagonales du losange sont BF et AG . Nous avons déjà calculé $BF = 6\sqrt{5}$ cm. La diagonale AG passe par le centre du losange et est perpendiculaire à BF .

Comme l'aire du losange est égale à l'aire du triangle OBC , on a

$$\mathcal{A}_{ABFG} = 36 \text{ cm}^2$$

Donc le triangle OBC et le losange $ABFG$ ont la même aire, soit 36 cm^2 .

