

Séquence XII – Multiples & Diviseurs



Exercice 1

Montrer que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est un nombre impair.

Solution de l'exercice 1 Soient n et $n + 1$ deux entiers consécutifs. Nous devons montrer que $(n + 1)^2 - n^2$ est impair.

$$\begin{aligned}(n + 1)^2 - n^2 &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1\end{aligned}$$

Or, un nombre de la forme $2n + 1$ est impair. Ainsi, la différence des carrés de deux entiers consécutifs est un nombre impair.



Exercice 2

Montrer que la différence des carrés de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 8.

Solution de l'exercice 2 Soit n un nombre entier impair. Ainsi, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. L'entier impair qui le suit est $n + 2 = 2k + 3$. Nous devons montrer que $(n + 2)^2 - n^2$ est un multiple de 8.

$$\begin{aligned}(n + 2)^2 - n^2 &= (2k + 3)^2 - (2k + 1)^2 \\ &= (4k^2 + 12k + 9) - (4k^2 + 4k + 1) \\ &= 4k^2 + 12k + 9 - 4k^2 - 4k - 1 \\ &= 8k + 8 \\ &= 8(k + 1)\end{aligned}$$

Comme k est un entier, $k + 1$ est également un entier, donc $(2k + 3)^2 - (2k + 1)^2$ est bien un multiple de 8, ce qui montre que la différence des carrés de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 8.



Exercice 3

Soit n un entier.

1. L'entier $n - 1$ est-il toujours un diviseur de l'entier $n^2 - 1$?
2. Montrer que $n - 1$ est un diviseur de $n^4 - 1$. Développer et réduire l'expression de k tel que $n^4 - 1 = (n - 1) \times k$.
3. On veut montrer que $n - 1$ est un diviseur de $n^3 - 1$. Élaborer une conjecture en s'inspirant de l'expression de l'entier k de la question précédente et montrer la propriété.

Solution de l'exercice 3

1. Pour vérifier si $n - 1$ est un diviseur de $n^2 - 1$, examinons l'expression de $n^2 - 1$. Nous avons $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. On peut voir que $n - 1$ est bien un facteur de $n^2 - 1$, donc $n - 1$ est toujours un diviseur de $n^2 - 1$.

2. Montrons que $n - 1$ est un diviseur de $n^4 - 1$. On sait que $n^4 - 1 = (n^2)^2 - 1^2 = (n^2 + 1)(n^2 - 1)$. En utilisant le résultat de la question précédente, $n - 1$ est un diviseur de $n^2 - 1$. On obtient

$$n^4 - 1 = (n - 1) \underbrace{(n + 1)(n^2 + 1)}_{=k}$$

Donc $n - 1$ est également un diviseur de $n^4 - 1$.

Pour trouver k , développons $(n + 1)(n^2 + 1)$:

$$\begin{aligned}k &= (n + 1)(n^2 + 1) \\ &= n^3 + n^2 + n + 1\end{aligned}$$

Donc, $k = n^3 + n^2 + n + 1$.

3. On souhaite montrer que $n - 1$ est un diviseur de $n^3 - 1$. En s'inspirant de la question précédente, où l'on a trouvé $n^4 - 1 = (n - 1)(n^3 + n^2 + n + 1)$, on peut conjecturer $k = n^2 + n + 1$. Montrons cette conjecture :

$$\begin{aligned}(n - 1)(n^2 + n + 1) &= n^3 + n^2 + 1 - n^2 - n - 1 \\ &= n^3 - 1\end{aligned}$$

D'où le résultat attendu.



Exercice 4

Évariste affirme que pour tout entier n positif, le nombre

$$a = 2^n \times 3^n \times 7^n + 2^n \times 21^n \times 5 + 6^n \times 7^n \times 4$$

est divisible par 10. A-t-il raison ?

Solution de l'exercice 4 Décomposons l'expression de a en facteurs :

$$\begin{aligned}a &= 2^n \times 3^n \times 7^n + 2^n \times 21^n \times 5 + 6^n \times 7^n \times 4 \\ &= 2^n \times 3^n \times 7^n + 2^n \times 3^n \times 7^n \times 5 + 2^n \times 3^n \times 7^n \times 4 \\ &= 2^n \times 3^n \times 7^n \times (1 + 5 + 4) \\ &= 42^n \times 10\end{aligned}$$

On remarque que a est effectivement divisible par 10 pour tout entier positif n . Évariste a donc raison.



Exercice 5

Soient a , b et d trois entiers. Montrer que si d divise a et d divise b , alors d divise $a + b$ et $a - b$.

Solution de l'exercice 5 Supposons que d divise a et b . Cela signifie qu'il existe des entiers k et ℓ tels que $a = kd$ et $b = \ell d$.

- Pour $a + b$, on a $a + b = kd + \ell d = (k + \ell)d$. Puisque $k + \ell$ est un entier, d divise $a + b$.
- Pour $a - b$, on a $a - b = kd - \ell d = (k - \ell)d$. Puisque $k - \ell$ est un entier, d divise $a - b$.

Ainsi, si d divise a et b , alors d divise $a + b$ et $a - b$.

Exercice 6

Soient a , b et c trois entiers. Montrer que si a divise b et b divise c , alors a divise c .

Solution de l'exercice 6 Supposons que a divise b et b divise c . Cela signifie qu'il existe des entiers k et ℓ tels que $b = ka$ et $c = \ell b$.

Puisque $b = ka$, nous pouvons substituer cette expression dans celle de c . Alors $c = \ell b = \ell(ka) = (\ell k)a$. Puisque ℓk est un entier, a divise c . Ainsi, si a divise b et b divise c , alors a divise c .

Exercice 7

Soient a et b deux entiers. Montrer que si a divise b , alors a^2 divise b^2 .

Solution de l'exercice 7 Supposons que a divise b . Cela signifie qu'il existe un entier k tel que $b = ka$. Alors, $b^2 = (ka)^2 = k^2 a^2$. Comme k^2 est un entier, cela montre que a^2 divise b^2 . Ainsi, si a divise b , alors a^2 divise b^2 .

Exercice 8

Barberousse pille un navire chargé d'or. Grand seigneur, il dit à ses 300 hommes : « Comptez ces pièces, partagez-les de manière équitable de sorte que chacun en ait le maximum et donnez-moi le reste, je m'en contenterai. ». Le décompte montre qu'il y a 6850 pièces d'or. Que pensez-vous de ce partage ?

Solution de l'exercice 8 Le nombre total de pièces d'or est de 6850. Si Barberousse veut que chacun de ses 300 hommes ait le maximum de pièces d'or, alors il va falloir partager équitablement ces pièces entre eux.

La division euclidienne 6 850 par 300 est

$$6850 = 300 \times 22 + 250$$

Donc, chaque homme aura 22 pièces d'or et il restera 250 pièces d'or à Barberousse.

La répartition des pièces d'or n'est pas totalement équitable puisque Barberousse garde une partie importante pour lui-même.

Exercice 9

Le centurion Arithmeticus est fier de son armée, bien qu'elle ne soit pas venue à bout du village gaulois. Pour le défilé à Rome, il demande à ses soldats de se ranger par lignes de 5, mais il reste 4 soldats. Il leur demande alors de se ranger par lignes de 6 mais il reste 5 soldats. Il leur demande enfin de se ranger par lignes de 8 mais il reste 7 soldats.

1. Combien cette armée compte-t-elle de soldats sachant qu'elle compte moins de deux cents hommes ?
2. Proposer un rangement des soldats tels que ceux-ci forment un rectangle.

Solution de l'exercice 9

1. Soit s le nombre total de soldats.

Lorsque les soldats se rangent par lignes de 5, il reste 4 soldats. Cela signifie que le nombre total de soldats est égal à $5k + 4$ avec k entier.

Lorsque les soldats se rangent par lignes de 6, il reste 5 soldats. Cela signifie que le nombre total de soldats est égal à $6m + 5$ avec m entier.

Lorsque les soldats se rangent par lignes de 8, il reste 7 soldats. Cela signifie que le nombre total de soldats est égal à $8p + 7$ avec p entier.

On remarque que $s + 1 = 5k + 5 = 5(k + 1)$ mais aussi $s + 1 = 6m + 6 = 6(m + 1)$ et aussi $s + 1 = 8p + 8 = 8(p + 1)$.

Ainsi $s + 1$ est un multiple de 5, de 6 et de 8. Alors $s + 1$ est un multiple du PPCM de ces trois nombres, qui est 120.

Donc $s + 1$ peut-être égal à 120, 240, 360, etc... Or $s < 200$, donc $s + 1 = 120$, c'est-à-dire $s = 119$.

2. $119 = 7 \times 17$. Donc on peut faire 7 lignes de 17 soldats ou 17 lignes de 7 soldats... On peut aussi faire 119 lignes de 1 soldat ou une ligne de 119 soldats, mais c'est moins pratique !!

Séquence XII – Nombres premiers

Exercice 10

On considère deux entiers consécutifs n et $n + 1$, avec n strictement positif. Soit d un diviseur commun à ces deux entiers. Déterminer l'unique valeur de d possible. En déduire que deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Solution de l'exercice 10 Soit n un entier strictement positif.

Soit d un diviseur commun positif à n et $n + 1$. Alors d divise n et d divise $n + 1$ à la fois.

En effet, d'après l'exercice 5, d divise la différence entre $n + 1$ et n est égale à 1. Donc d divise $n + 1 - n$, c'est-à-dire d divise 1. Ainsi $d = 1$.

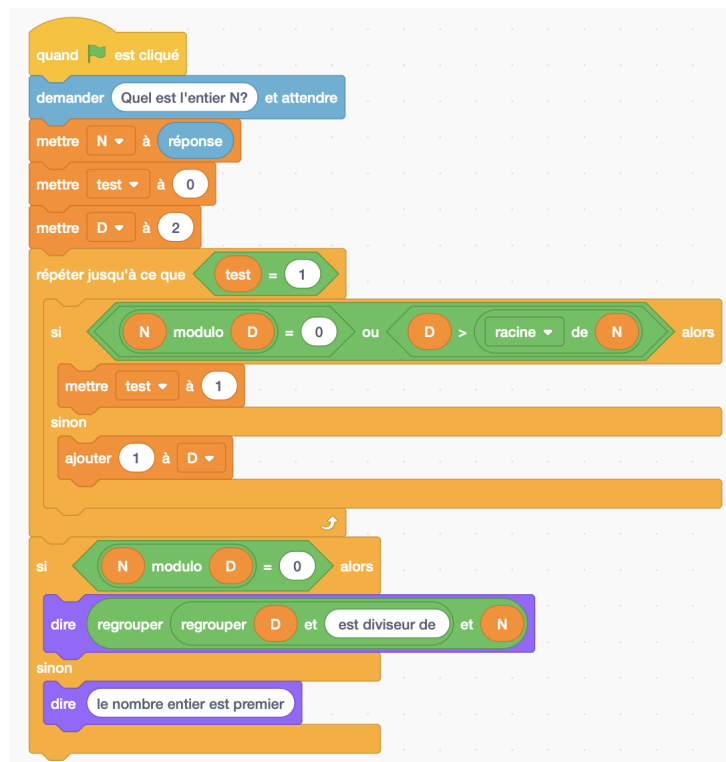
Par conséquent, l'unique valeur possible de d est 1.

Donc, deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux, puisqu'ils n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exercice 11

Coder un test de primalité sur Scratch, à l'aide d'une propriété du cours.

Solution de l'exercice 11



Exercice 12

Pierre de Fermat est un mathématicien français du XVII^e siècle. Il a conjecturé que les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$, où n est un nombre entier naturel, sont des nombres premiers. On note $F_n = 2^{2^n} + 1$ le n -ième nombre de Fermat.

1. Calculer F_0 , F_1 , F_2 et F_3 . Vérifier que ce sont bien des nombres premiers.
2. À l'aide du programme Scratch, tester la primalité de F_4 et F_5 . Ce résultat a été établi par Leonhard Euler en 1750 sans calculatrice !

Solution de l'exercice 12

1. Pour calculer les premiers nombres de Fermat, nous utilisons la formule $F_n = 2^{2^n} + 1$:

- $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$
Donc F_0 est un nombre premier.
- $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
Donc F_1 est un nombre premier.
- $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$
Donc F_2 est un nombre premier.
- $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 256 + 1 = 257$
Donc F_3 est un nombre premier.

Ainsi, les nombres F_0 , F_1 , F_2 et F_3 sont bien des nombres premiers.

2. Nous utilisons le programme informatique de la question précédente pour tester la primalité de F_4 et F_5 . Selon la conjecture de Fermat, ces nombres devraient être premiers.

Résultats :

- $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537$
Donc F_4 est un nombre premier.
- Pour F_5 :

$$\begin{aligned} F_5 &= 2^{2^5} + 1 \\ &= 2^{32} + 1 \\ &= 4\,294\,967\,297 \\ &= 641 \times 6\,700\,417 \end{aligned}$$

Donc F_5 n'est pas un nombre premier.

Ce résultat a été établi par Leonhard Euler en 1750. Depuis, on a démontré que les nombres F_6 à F_{32} ne sont pas premiers. On ne sait toujours pas si F_{33} est premier, ou non.

Exercice 13

Je suis un nombre entier compris strictement entre 1 509 et 1 524. Je suis divisible par 2 et par 3 mais ni par 4 ni par 9. Qui suis-je ?

Solution de l'exercice 13

La plus petite valeur possible pour un nombre divisible par 2 et par 3 est 6, car c'est le plus petit multiple commun de 2 et de 3. Ainsi, le premier nombre entier multiple de 6 dans l'intervalle donné est 1 512 (6×252).

Il est clair que 1 512 est divisible par 2 et par 3. Vérifions maintenant s'il est divisible par 4 ou par 9. 1 512 est un multiple de 4, mais c'est aussi un multiple de 9, donc il est exclu.

On considère le multiple de 6 suivant, à savoir 1 518. Ce nombre est un multiple de 2 car le chiffre des unités est 8 et un multiple de 3, car la somme de ses chiffres ($1 + 5 + 1 + 8 = 15$) est bien un multiple de 3, mais n'est pas un multiple de 4, ni un multiple de 9.

Donc, le nombre recherché est 1 518

La solution est unique. Le multiple de 6 suivant est 1 524, qui est en dehors de l'intervalle proposé.

Exercice 14

On divise 4 373 et 826 par un même entier naturel b . On obtient respectivement 8 et 7 comme reste. Quel est cet entier naturel ?

Solution de l'exercice 14

On cherche b un entier naturel tel qu'il existe des entiers k et k' tels que :

$$bk + 8 = 4373 \text{ et } bk' + 7 = 826$$

Ainsi $bk = 4365$ et $bk' = 819$.

La décomposition en produit de facteurs premiers de 4365 et 819 est :

4365	3	819	3
1455	3	273	3
485	5	91	7
97	97	13	13
1		1	

Ainsi $bk = 3^2 \times 5 \times 97$ et $bk' = 3^2 \times 7 \times 13$

Donc le nombre apparaissant à la fois dans la décomposition de bk et bk' est 3^2 , c'est-à-dire 9.

Donc l'entier cherché est 9.

Exercice 15

Le reste dans la division euclidienne d'un entier n par 52 est 17. Le reste dans la division du même entier n par 65 est aussi 17. Quel est cet entier, sachant qu'il est compris entre 100 et 500 ?

Solution de l'exercice 15

Le reste dans la division euclidienne de n par 52 est 17. Cela signifie qu'il existe un entier q_1 tel que $n = 52q_1 + 17$. Le reste dans la division euclidienne de n par 65 est également 17. Cela signifie qu'il existe un entier q_2 tel que $n = 65q_2 + 17$.

Nous avons donc deux équations :

$$\begin{cases} n = 52q_1 + 17 \\ n = 65q_2 + 17 \end{cases}$$

Nous pouvons résoudre ces équations pour trouver q_1 et q_2 .

Premièrement, trouvons un entier n compris entre 100 et 500 qui vérifie ces conditions.

$$52q_1 + 17 = 65q_2 + 17$$

$$52q_1 = 65q_2$$

formulation niveau troisième à finir

Donc, l'entier recherché est $n = \dots\dots ?$.

Exercice 16

Dans une division euclidienne, quels peuvent être le diviseur et le quotient si le dividende est 990 et le reste est 70 ?

Solution de l'exercice 16 Soit d le diviseur et q le quotient. Nous avons l'équation suivante pour la division euclidienne :

$$990 = dq + 70$$

Nous pouvons réécrire cette équation sous la forme suivante pour exprimer le quotient en fonction du diviseur :

$$q = \frac{990 - 70}{d}$$
$$q = \frac{920}{d}$$

Nous devons trouver tous les diviseurs d pour lesquels $\frac{920}{d}$ donne un quotient entier.

Les diviseurs de 920 sont

1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 23, 40, 46, 92, 115, 184, 230, 460, 920.

Nous pouvons maintenant calculer les quotients correspondants en utilisant ces diviseurs.

- Pour $d = 1$,

$$q = \frac{920}{1} = 920$$

- Pour $d = 2$,

$$q = \frac{920}{2} = 460$$

- Pour $d = 4$,

$$q = \frac{920}{4} = 230$$

- Pour $d = 5$,

$$q = \frac{920}{5} = 184$$

- Pour $d = 8$,

$$q = \frac{920}{8} = 115$$

- Pour $d = 10$,

$$q = \frac{920}{10} = 92$$

- Pour $d = 20$,

$$q = \frac{920}{20} = 46$$

- Pour $d = 23$,

$$q = \frac{920}{23} = 40$$

- Pour $d = 40$,

$$q = \frac{920}{40} = 23$$

- Pour $d = 46$,

$$q = \frac{920}{46} = 20$$

- Pour $d = 92$,

$$q = \frac{920}{92} = 10$$

- Pour $d = 115$,

$$q = \frac{920}{115} = 8$$

- Pour $d = 184$,

$$q = \frac{920}{184} = 5$$

- Pour $d = 230$,

$$q = \frac{920}{230} = 4$$

- Pour $d = 460$,

$$q = \frac{920}{460} = 2$$

- Pour $d = 920$,

$$q = \frac{920}{920} = 1$$

Ainsi, les diviseurs et les quotients possibles sont les suivants :

Diviseur (d)	Quotient (q)
1	920
2	460
4	230
5	184
8	115
10	92
20	46
23	40
40	23
46	20
92	10
115	8
184	5
230	4
460	2
920	1

Or, dans une division euclidienne, le reste doit être plus petit que le diviseur. Ainsi, seul les couples où le diviseur est plus petit que 70 conviennent. Donc les diviseurs et les quotients possibles sont les suivants :

Diviseur (d)	Quotient (q)
1	920
2	460
4	230
5	184
8	115
10	92
20	46
23	40
40	23
46	20

Séquence XII – Applications



Exercice 17

Déterminer les PGCD et PPCM des couples de nombres suivants :

- (132 ; 384)
- (75 ; 45)
- (84 ; 32)
- (16 ; 25)
- (378 ; 180)
- (90 ; 45)
- (36 ; 54)
- (204 ; 528)

Solution de l'exercice 17

- (132 ; 384)

Décomposition en facteurs premiers :

$$132 = 2^2 \times 3 \times 11$$

$$384 = 2^7 \times 3$$

$$\text{PGCD}(132 ; 384) = 2^2 \times 3 = 12$$

$$\text{PPCM}(132 ; 384) = 2^7 \times 3 \times 11 = 4224$$

- (75 ; 45)

Décomposition en facteurs premiers :

$$75 = 3 \times 5^2$$

$$45 = 3^2 \times 5$$

$$\text{PGCD}(75 ; 45) = 3 \times 5 = 15$$

$$\text{PPCM}(75 ; 45) = 3^2 \times 5^2 = 225$$

- (84 ; 32)

Décomposition en facteurs premiers :

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$32 = 2^5$$

$$\text{PGCD}(84 ; 32) = 2^2 = 4$$

$$\text{PPCM}(84 ; 32) = 2^5 \times 3 \times 7 = 672$$

- (16 ; 25)

Décomposition en facteurs premiers :

$$16 = 2^4$$

$$25 = 5^2$$

$$\text{PGCD}(16 ; 25) = 1$$

$$\text{PPCM}(16 ; 25) = 2^4 \times 5^2 = 400$$

- (378 ; 180)

Décomposition en facteurs premiers :

$$378 = 2 \times 3^3 \times 7$$

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$\text{PGCD}(378 ; 180) = 2 \times 3^2 = 18$$

$$\text{PPCM}(378 ; 180) = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 3780$$

- (90 ; 45)

Décomposition en facteurs premiers :

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$45 = 3^2 \times 5$$

$$\text{PGCD}(90 ; 45) = 3^2 \times 5 = 45$$

$$\text{PPCM}(90 ; 45) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$$

- (36 ; 54)

Décomposition en facteurs premiers :

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$54 = 2 \times 3^3$$

$$\text{PGCD}(36 ; 54) = 2 \times 3^2 = 18$$

$$\text{PPCM}(36 ; 54) = 2^2 \times 3^3 = 108$$

- (204 ; 528)

Décomposition en facteurs premiers :

$$204 = 2^2 \times 3 \times 17$$

$$528 = 2^4 \times 3 \times 11$$

$$\text{PGCD}(204 ; 528) = 2^2 \times 3 = 12$$

$$\text{PPCM}(204 ; 528) = 2^4 \times 3 \times 11 \times 17 = 8976$$



Exercice 18

Déterminer les PGCD et PPCM des triplets de nombres suivants :

- (384 ; 126 ; 132)
- (144 ; 468 ; 688)
- (1260 ; 3024 ; 5544)
- (37 ; 185 ; 333)
- (847 ; 1089 ; 1210)
- (2700 ; 4050 ; 6750)

Solution de l'exercice 18

- (384 ; 126 ; 132)

Décomposition en facteurs premiers :

$$384 = 2^7 \times 3$$

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

$$132 = 2^2 \times 3 \times 11$$

$$\text{PGCD}(384 ; 126 ; 132) = 2 \times 3 = 6$$

$$\begin{aligned}\text{PPCM}(384 ; 126 ; 132) &= 2^7 \times 3^2 \times 7 \times 11 \\ &= 88704\end{aligned}$$

- (144 ; 468 ; 688)

Décomposition en facteurs premiers :

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

$$468 = 2^2 \times 3^2 \times 13$$

$$688 = 2^4 \times 43$$

$$\text{PGCD}(144 ; 468 ; 688) = 2^2 = 4$$

$$\text{PPCM}(144 ; 468 ; 688) = 2^4 \times 3^2 \times 13 \times 43 = 80496$$

- (1260 ; 3024 ; 5544)

Décomposition en facteurs premiers :

$$1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$$3024 = 2^4 \times 3^3 \times 7$$

$$5544 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11$$

$$\text{PGCD}(1260 ; 3024 ; 5544) = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$$

$$\begin{aligned} \text{PPCM}(1260 ; 3024 ; 5544) &= 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \\ &= 166\,320 \end{aligned}$$

- (37 ; 185 ; 333)

Décomposition en facteurs premiers :

$$37 = 37$$

$$185 = 5 \times 37$$

$$333 = 3^2 \times 37$$

$$\text{PGCD}(37 ; 185 ; 333) = 37$$

$$\text{PPCM}(37 ; 185 ; 333) = 3^2 \times 5 \times 37 = 1\,665$$

- (847 ; 1089 ; 1210)

Décomposition en facteurs premiers :

$$847 = 7 \times 11^2$$

$$1089 = 3^2 \times 11^2$$

$$1210 = 2 \times 5 \times 11^2$$

$$\text{PGCD}(847 ; 1089 ; 1210) = 11^2 = 121$$

$$\begin{aligned} \text{PPCM}(847 ; 1089 ; 1210) &= 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11^2 \\ &= 51\,870 \end{aligned}$$

- (2700 ; 4050 ; 6750)

Décomposition en facteurs premiers :

$$2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$$

$$4050 = 2 \times 3^4 \times 5^2$$

$$6750 = 2 \times 3^3 \times 5^3$$

$$\text{PGCD}(2700 ; 4050 ; 6750) = 2 \times 3^3 \times 5^2 = 1\,350$$

$$\text{PPCM}(2700 ; 4050 ; 6750) = 2^2 \times 3^4 \times 5^3 = 40\,500$$

Exercice 19

Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes. Au bout de combien de temps les deux voitures vont-elles à nouveau repasser ensemble la ligne de départ ?

Solution de l'exercice 19 Pour que les deux voitures se retrouvent ensemble à la ligne de départ, il faut que le temps écoulé soit un multiple commun des temps de passage de chaque voiture.

En utilisant la décomposition en facteurs premiers des temps de passage de chaque voiture :

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

Le PPCM des temps de passage de chaque voiture est le produit des facteurs premiers communs et non communs élevés au maximum de leurs puissances :

$$\text{PPCM}(36, 30) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$$

Donc, les deux voitures se retrouveront ensemble à la ligne de départ après 180 minutes.

Exercice 20

On possède trois règles d'une longueur de 24 cm. On les partage respectivement en 20, 30 et 40 parties égales. Ensuite, on superpose les trois règles.

1. Quelle est la distance entre deux traits de division consécutifs qui coïncident sur les trois règles ?
2. Combien de fois les traits de division coïncident-ils sur les trois règles ?
3. Quelle est la distance entre les traits de division qui coïncident pour la 4^e et la 7^e fois sur les trois règles.

Solution de l'exercice 20

1. La distance entre deux traits de division consécutifs sur chaque règle est donnée par $\frac{24}{\text{nombre de divisions}}$. Pour les trois règles, nous avons :

$$\text{Pour la première règle : } \frac{24}{20} = 1,2 \text{ cm}$$

$$\text{Pour la deuxième règle : } \frac{24}{30} = 0,8 \text{ cm}$$

$$\text{Pour la troisième règle : } \frac{24}{40} = 0,6 \text{ cm}$$

Ainsi, la distance entre deux traits de division consécutifs qui coïncident sur les trois règles est le PPCM des distances calculées, c'est-à-dire :

$$\text{PPCM}(1,2 ; 0,8 ; 0,6) = 2,4 \text{ cm}$$

Donc, la distance entre deux traits de division consécutifs qui coïncident sur les trois règles est de 2,4 cm.

2. faire avec Serge
3. à faire avec Serge

Exercice 21

1. Décomposer 378 et 270 en produits de facteurs premiers et en déduire PGCD (378 ; 270).
2. Pour une kermesse, un comité des fêtes dispose de 378 billes et 270 calots. Il veut faire le plus grand nombre de lots identiques en utilisant toutes les billes et tous les calots.
Combien de lots identiques pourra-t-il faire ?
Quelle sera la composition de chaque lot ?

Solution de l'exercice 21

1. Voilà la décomposition de 378 et de 270 en produits de facteurs premiers :

$$378 = 2 \times 3^3 \times 7$$

$$270 = 2 \times 3^3 \times 5$$

Le PGCD(378 ; 270) est le produit des facteurs premiers communs élevés à la puissance minimale, donc

$$\text{PGCD}(378 ; 270) = 2 \times 3^3 = 54$$

2. Pour une kermesse, un comité des fêtes dispose de 378 billes et 270 calots. Il veut faire le plus grand nombre de lots identiques en utilisant toutes les billes et tous les calots.

Le nombre de lots identiques sera égal au

$$\text{PGCD}(378 ; 270) = 54$$

La composition de chaque lot sera de 54 billes et 54 calots.

Exercice 22

Karl-Friedrich possède un terrain de forme triangulaire, dont les dimensions sont, en mètres : 518, 448 et 350. Il veut planter des arbres régulièrement espacés sur chaque côté du terrain, en plaçant un arbre à chaque sommet du triangle. La distance d entre deux arbres consécutifs, qui est donc la même sur les trois côtés du terrain, doit être mesurée par un nombre entier de mètres.

1. Combien d'arbres (au minimum) doit-il acheter ?
2. Sachant qu'un arbre coûte 54 €, quel est le coût de cet investissement.

Solution de l'exercice 22

1. Pour déterminer le nombre d'arbres minimum, nous devons trouver le PGCD des longueurs des côtés du triangle.

En décomposant chaque longueur en facteurs premiers :

$$518 = 2 \times 7 \times 37$$

$$448 = 2^6 \times 7$$

$$350 = 2 \times 5^2 \times 7$$

Le PGCD de 518, 448 et 350 est donc $2 \times 7 = 14$. Cela signifie que la plus grande distance possible entre deux arbres consécutifs est de 14 mètres. Karl-Friedrich doit donc acheter un arbre tous les 14 mètres sur chaque côté du terrain.

Pour calculer le nombre total d'arbres, nous divisons la longueur de chaque côté par la distance entre les arbres :

$$\frac{518}{14} = 37 \text{ arbres}$$

$$\frac{448}{14} = 32 \text{ arbres}$$

$$\frac{350}{14} = 25 \text{ arbres}$$

Le nombre minimum d'arbres qu'il doit acheter est donc $37 + 32 + 25 = 94$ arbres.

2. Le coût total de l'investissement en arbres est le produit du nombre d'arbres et du coût par arbre, soit $94 \times 54 = 5\,076$ €.

Exercice 23

Donner la forme irréductible des fractions :

$$\bullet \frac{532}{476}$$

$$\bullet \frac{14\,874}{14\,606}$$

$$\bullet \frac{188\,784}{5\,472}$$

Solution de l'exercice 23

- $\frac{532}{476}$. Pour calculer le PGCD de 532 et 476, nous commençons par décomposer ces nombres en facteurs premiers :

$$532 = 2^2 \times 7 \times 19$$

$$476 = 2^2 \times 7 \times 17$$

Le PGCD de 532 et 476 est $2^2 \times 7 = 28$. En simplifiant la fraction, nous obtenons :

$$\frac{532}{476} = \frac{532 \div 28}{476 \div 28} = \frac{19}{17}$$

- $\frac{14874}{14606}$. Pour calculer le PGCD de 14 874 et 14 606, nous décomposons ces nombres en facteurs premiers :

$$14874 = 2 \times 3 \times 13 \times 191$$

$$14606 = 2 \times 7 \times 17 \times 61$$

Le PGCD de 14 874 et 14 606 est $2 = 2^1$. La fraction En simplifiant la fraction, nous obtenons :

$$\frac{14874}{14606} = \frac{14874 \div 2}{14606 \div 2} = \frac{7437}{7303}$$

- $\frac{188784}{5472}$. Pour calculer le PGCD de 188 784 et 5 472, nous décomposons ces nombres en facteurs premiers :

$$188784 = 2^4 \times 3 \times 7 \times 449$$

$$5472 = 2^7 \times 3 \times 11$$

Le PGCD de 188 784 et 5 472 est $2^4 \times 3 = 48$. En simplifiant la fraction, nous obtenons :

$$\frac{188784}{5472} = \frac{188784 \div 48}{5472 \div 48} = \frac{3937}{114}$$

Exercice 24

Emmy est dans une classe de 32 élèves. Elle a acheté un paquet de 60 bonbons. Elle veut les partager avec ses amis (pour partager aussi ses caries) mais tient absolument à ce que chacun d'eux (et elle-même) ait le même nombre de bonbons. Combien d'amis (au maximum) pourront recevoir des bonbons ? **énoncé pas clair...**

Solution de l'exercice 24

Pour que chaque élève reçoive le même nombre de bonbons, le nombre total de bonbons doit être divisible par le nombre d'élèves. Le nombre total de bonbons est 60 et le nombre d'élèves est 32. Nous devons trouver le plus grand diviseur commun de 60 et 32.

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$32 = 2^5$$

Ainsi, le PGCD de 60 et 32 est 2^2 , c'est-à-dire 4.

Donc Emmy et ses 4 amis pourront recevoir des bonbons.

Exercice 25

On considère un groupe de danseurs sur une piste. Lorsqu'ils se regroupent par 2, il en reste 1 tout seul. Lorsqu'ils se regroupent par 3, il en reste 2. Lorsqu'ils se regroupent par 4, il en reste 3. Lorsqu'ils se regroupent par 5, il en reste 4. Combien y a-t-il de danseurs sachant qu'ils sont moins de 100 ?

Solution de l'exercice 25 Nous allons utiliser la division euclidienne.

- Lorsqu'ils se regroupent par 2, il en reste 1 tout seul. Cela signifie que le nombre total de danseurs est impair.
- Lorsqu'ils se regroupent par 3, il en reste 2. Cela signifie que le nombre total de danseurs est de la forme $3k + 2$.
- Lorsqu'ils se regroupent par 4, il en reste 3. Cela signifie que le nombre total de danseurs est de la forme $4k + 3$.
- Lorsqu'ils se regroupent par 5, il en reste 4. Cela signifie que le nombre total de danseurs est de la forme $5k + 4$.

En cherchant des nombres qui satisfont ces conditions et qui sont inférieurs à 100, nous trouvons que le nombre total de danseurs est 59.

à compléter

Exercice 26

Le grand livre de magie de Merlin est ouvert à la double-page de la recette de la potion magique pour réussir le concours d'entrée au LFA. Les numéros de ces deux pages sont composés chacun de trois chiffres différents. Le produit de ces six chiffres est 2400. Quel est le numéro de la première page de la recette ? *(Merci de ne pas divulguer la réponse hors du LFA).*

Solution de l'exercice 26

à faire avec Serge

