

Séquence XIII – Statistiques



Exercice 1

On considère la série de nombres :

$$15 - 10 - 13 - 9 - 10 - x$$

1. Quelle est la valeur de x pour laquelle la moyenne de cette série est 11 ?
2. Dans ce cas, quelle est l'étendue de la série ?
3. Dans ce cas, quelle est la médiane de la série ?

Solution de l'exercice 1

1. Pour calculer la moyenne d'une série de nombres, on fait la somme de tous les nombres puis on divise par le nombre de valeurs.

Données de la série : $15 - 10 - 13 - 9 - 10 - x$

Si la moyenne est égale à 11, on peut écrire :

$$\frac{15 + 10 + 13 + 9 + 10 + x}{6} = 11$$

Réolvons cette équation :

$$\begin{aligned} 15 + 10 + 13 + 9 + 10 + x &= 11 \times 6 \\ 57 + x &= 66 \\ x &= 66 - 57 = 9 \end{aligned}$$

Donc $x = 9$ pour que la moyenne de la série soit égale à 11.

2. L'étendue d'une série statistique est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale.

Avec $x = 9$, notre série devient :

$$15 - 10 - 13 - 9 - 10 - 9$$

La valeur maximale est 15 et la valeur minimale : 9.
Donc l'étendue = $15 - 9 = 6$.

3. Pour trouver la médiane d'une série statistique, on ordonne d'abord les valeurs puis :

- Si le nombre de valeurs est impair, la médiane est la valeur centrale
- Si le nombre de valeurs est pair, la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales

Avec $x = 9$, notre série devient :

$$15 - 10 - 13 - 9 - 10 - 9$$

Rangeons ces valeurs par ordre croissant :

$$9 - 9 - 10 - 10 - 13 - 15$$

Notre série comporte 6 valeurs (nombre pair), donc la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales, soit la moyenne de la 3ème et la 4ème valeur.

$$\text{Médiane} = \frac{10 + 10}{2} = 10$$



Exercice 2

On a relevé les performances, en mètres, obtenues au lancer de poids par un groupe de 13 élèves d'une classe :

$$\begin{aligned} &3,41 \text{ m} ; 5,25 \text{ m} ; 5,42 \text{ m} ; 4,3 \text{ m} ; 6,11 \text{ m} ; \\ &4,28 \text{ m} ; 5,15 \text{ m} ; 3,7 \text{ m} ; 6,07 \text{ m} ; 5,82 \text{ m} ; \\ &4,62 \text{ m} ; 4,91 \text{ m} ; 4,01 \text{ m}. \end{aligned}$$

1. Quelle est l'étendue de cette série de valeurs ?
2. Quelle est la moyenne de cette série de valeurs ?
3. Quelle est la médiane de cette série de valeurs ?

Solution de l'exercice 2

1. L'étendue d'une série statistique est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale.

Valeur maximale : 6,11 m

Valeur minimale : 3,41 m

$$\text{Étendue} = 6,11 - 3,41 = 2,7 \text{ m}$$

2. La moyenne d'une série statistique est la somme de toutes les valeurs divisée par le nombre de valeurs.

Somme des valeurs :

$$\begin{aligned} &3,41 + 5,25 + 5,42 + 4,3 + 6,11 + 4,28 + 5,15 \\ &+ 3,7 + 6,07 + 5,82 + 4,62 + 4,91 + 4,01 = 63,05 \text{ m} \end{aligned}$$

Nombre de valeurs : 13

$$\text{Moyenne} = \frac{63,05}{13} \approx 4,85 \text{ m}$$

3. La médiane d'une série statistique est la valeur qui partage la série ordonnée en deux groupes de même effectif.

Rangeons les valeurs par ordre croissant :

$$\begin{aligned} &3,41 \text{ m} ; 3,7 \text{ m} ; 4,01 \text{ m} ; 4,28 \text{ m} ; 4,3 \text{ m} ; 4,62 \text{ m} ; \\ &4,91 \text{ m} ; 5,15 \text{ m} ; 5,25 \text{ m} ; 5,42 \text{ m} ; 5,82 \text{ m} ; 6,07 \text{ m} ; \\ &6,11 \text{ m} \end{aligned}$$

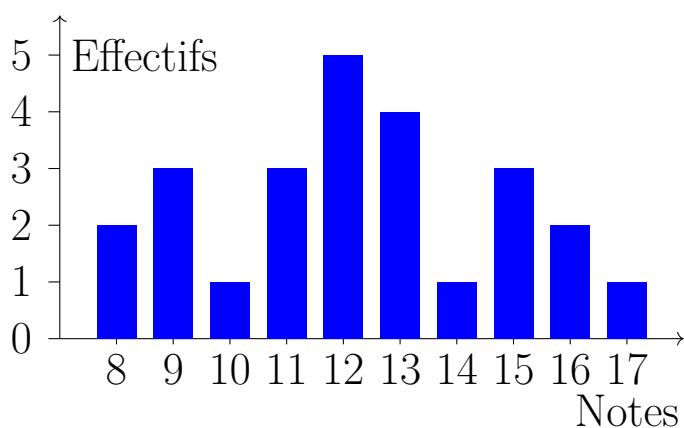
Le nombre de valeurs est 13 (impair), donc la médiane est la valeur située en position

$$\frac{13 + 1}{2} = 7$$

C'est la 7^e valeur de la série ordonnée, soit 4,91 m.

Exercice 3

Voici le diagramme en bâtons des notes obtenues par une classe de 3^e au dernier devoir de mathématiques.



- Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?
- Quelle est l'étendue des notes ?
- Quelle est la moyenne de la classe ?
- Quelle est la note médiane ? Interpréter le résultat.

Solution de l'exercice 3

- Pour déterminer le nombre d'élèves dans la classe, il faut calculer la somme des effectifs pour chaque note. D'après le diagramme en bâtons :

Note	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Effectif	2	3	1	3	5	4	1	3	2	1

Nombre total d'élèves

$$= 2 + 3 + 1 + 3 + 5 + 4 + 1 + 3 + 2 + 1$$

$$= 25 \text{ élèves.}$$

- L'étendue est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de la série. La note maximale est 17 et la note minimale est 8.

$$\text{Étendue} = 17 - 8 = 9$$

3.

$$\bar{x} = \frac{8 \times 2 + 9 \times 3 + 10 \times 1 + 11 \times 3 + 12 \times 5 + 13 \times 4 + 14 \times 1 + 15 \times 3 + 16 \times 2 + 17 \times 1}{25}$$

$$= \frac{16 + 27 + 10 + 33 + 60 + 52 + 14 + 45 + 32 + 17}{25}$$

$$= \frac{306}{25} = 12,24$$

La moyenne de la classe est donc 12,24.

- La médiane est la valeur qui partage la série en deux groupes d'effectifs égaux. Puisqu'il y a 25 élèves (nombre impair), la médiane correspond à la valeur de rang $\frac{25+1}{2} = 13$. D'après le tableau, la 13^e valeur correspond à la note 12.

Interprétation : La note médiane est 12, ce qui signifie que 50 % des élèves ont obtenu une note inférieure ou égale à 12, et 50 % des élèves ont obtenu une note supérieure ou égale à 12.

Exercice 4

Paris-Nice est une course cycliste qui se déroule chaque année et qui mène les coureurs de la région parisienne à la région niçoise. L'édition 2021 s'est déroulée en 7 étapes décrites ci-dessous :

Étape	Date	Profil	Parcours	Distance
1	Dim. 7 mars	Accidenté	St-Cyr l'É. → St-Cyr l'É.	166 km
2	Lun. 8 mars	Plat	Oinville/M. → Amilly	188 km
3	Mer. 10 mars	Accidenté	Chalon/Saône → Chiroubles	187,5 km
4	Jeu. 11 mars	Plat	Vienne → Bollène	200 km
5	Ven. 12 mars	Accidenté	Brignoles → Biot	202,5 km
6	Sam. 13 mars	Montagneux	Le Broc → Valdebllore	119,5 km
7	Dim. 14 mars	Accidenté	Plan-du-Var → Levens	93 km

- On étudie la série des distances parcourues par étape.
 - Calculer la distance moyenne parcourue par étape, arrondie au dixième de km.
 - Calculer la médiane des distances parcourues par étape.
 - Calculer l'étendue de la série formée par les distances parcourues par étape.
- Un journaliste affirme : « Environ 57 % du nombre total d'étapes de cette édition se sont déroulées sur un parcours accidenté. » A-t-il raison ? Expliquer votre réponse.
- L'Allemand Maximilian Schachmann a remporté la course en 28 h 50 min. Le dernier au classement général a effectué l'ensemble du parcours en 30 h 12 min. Combien de retard le dernier au classement a-t-il accumulé par rapport au vainqueur ?
- L'Irlandais Sam Benneti a remporté la première étape en 3 h 51 min. Déterminer sa vitesse moyenne en km/h, arrondie à l'unité, lors de cette étape.

Solution de l'exercice 4

1. Étude de la série des distances parcourues par étape.

- (a) Pour calculer la distance moyenne parcourue par étape, on doit faire la somme de toutes les distances, puis diviser par le nombre d'étapes.

Somme des distances

$$= 166 + 188 + 187,5 + 200 + 202,5 + 119,5 + 93 \\ = 1156,5 \text{ km}$$

Nombre d'étapes = 7

$$\text{Distance moyenne} = \frac{1156,5}{7} \approx 165,2 \text{ km}$$

La distance moyenne parcourue par étape est d'environ 165,2 km.

- (b) Pour calculer la médiane, on doit d'abord ranger les distances par ordre croissant.

Distances rangées par ordre croissant :

93 km ; 119,5 km ; 166 km ; 187,5 km ; 188 km ; 200 km ; 202,5 km

Comme il y a 7 étapes (nombre impair), la médiane est la valeur centrale, c'est-à-dire la valeur de rang $\frac{7+1}{2} = 4$.

La médiane est donc la 4ème valeur : 187,5 km.

- (c) L'étendue d'une série est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale.

Valeur maximale = 202,5 km

Valeur minimale = 93 km

$$\text{Étendue} = 202,5 - 93 = 109,5 \text{ km}$$

2. Pour vérifier l'affirmation du journaliste, on doit calculer le pourcentage d'étapes ayant un profil accidenté.

D'après le tableau, les étapes ayant un profil accidenté sont les étapes 1, 3, 5 et 7, soit 4 étapes.

Nombre total d'étapes = 7

Pourcentage d'étapes accidentées

$$= \frac{4}{7} \times 100$$

$$\approx 57,14 \%$$

Le journaliste a donc raison car environ 57 % des étapes se sont déroulées sur un parcours accidenté.

3. Pour calculer le retard du dernier coureur par rapport au vainqueur, on doit soustraire le temps du vainqueur du temps du dernier.

Temps du vainqueur (Maximilian Schachmann) = 28 h 50 min.

Temps du dernier = 30 h 12 min

$$\text{Retard} = 30 \text{ h } 12 \text{ min} - 28 \text{ h } 50 \text{ min} \\ = 1 \text{ h } 22 \text{ min}$$

Le dernier au classement a donc accumulé un retard de 1 h 22 min par rapport au vainqueur.

4. Pour calculer la vitesse moyenne de Sam Benneti lors de la première étape.

Distance parcourue = 166 km

Temps = 3 h 51 min

$$= 3,85 \text{ h}$$

(car 51 min = 51/60 h = 0,85 h)

Donc

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{166}{3,85} \approx 43,12 \text{ km/h}$$

Arrondie à l'unité, la vitesse moyenne de Sam Benneti lors de la première étape était de 43 km/h.

Exercice 5

Dans une entreprise, les salaires en euros se répartissent de la façon suivante :

Classe	Effectif
$1000 \leq x < 1200$	12
$1200 \leq x < 1400$	20
$1400 \leq x < 1600$	40
$1600 \leq x < 1800$	18
$1800 \leq x < 2000$	6
$2000 \leq x < 2200$	4

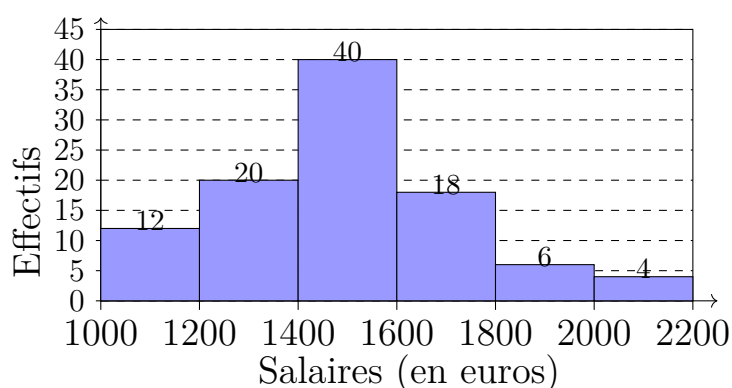
1. Construire un histogramme des effectifs.
2. Quel est le salaire médian dans cette entreprise ?
3. Quel est le salaire moyen dans cette entreprise ?

Solution de l'exercice 5

1. Pour construire un histogramme des effectifs, on doit représenter chaque classe de salaire par un rectangle dont :

- la base correspond à l'intervalle de la classe
- la hauteur correspond à l'effectif de la classe

Toutes les classes ont la même amplitude (200 €), donc la hauteur des rectangles sera proportionnelle aux effectifs.



2. Pour calculer le salaire médian, on doit d'abord déterminer l'effectif total et trouver la valeur qui sépare la série en deux parties de même effectif.

$$\begin{aligned}\text{Effectif total} &= 12 + 20 + 40 + 18 + 6 + 4 \\ &= 100 \text{ personnes}\end{aligned}$$

Le salaire médian dans cette entreprise est donc dans la classe $[1400 ; 1600[$.

3. Le salaire moyen se calcule en faisant la somme des produits (centre de classe $\times$ effectif) divisée par l'effectif total.

Classe	Centre	Effectif	Centre $\times$ Effectif
$1000 \leq x < 1200$	1100	12	13 200
$1200 \leq x < 1400$	1300	20	26 000
$1400 \leq x < 1600$	1500	40	60 000
$1600 \leq x < 1800$	1700	18	30 600
$1800 \leq x < 2000$	1900	6	11 400
$2000 \leq x < 2200$	2100	4	8 400
Total		100	149 600

Salaire moyen :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{149\,600}{100} \\ &= 1\,496 \text{ €}\end{aligned}$$

Le salaire moyen dans cette entreprise est de 1 496 €.



Exercice 6

Les informations suivantes concernent les salaires des hommes et des femmes d'une même entreprise :

- Salaires des femmes (en euros) :

1 200 ; 1 230 ; 1 250 ; 1 310 ; 1 370
1 400 ; 1 440 ; 1 500 ; 1 700 ; 2 100

- Salaire des hommes :

— Effectif total : 20
— Moyenne : 1 769 €
— Étendue : 2 400 €
— Médiane : 2 000 €

Les salaires des hommes sont tous différents.

1. Comparer le salaire moyen des hommes et celui des femmes.
2. On choisit au hasard une personne dans l'entreprise. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
3. Le plus bas salaire de l'entreprise est de 1 000 euros. Quel salaire est le plus élevé ?
4. Dans cette entreprise, combien de personnes gagnent plus de 2 000 euros ?

Solution de l'exercice 6

1. Pour comparer le salaire moyen des hommes et celui des femmes, on doit d'abord calculer le salaire moyen des femmes.

Salaire moyen des femmes =

$$\frac{1\,200 + 1\,230 + 1\,250 + 1\,310 + 1\,370 + 1\,400 + 1\,440 + 1\,500 + 1\,700 + 2\,100}{10}$$

Donc le salaire moyen des femmes est $\frac{14\,500}{10}$, c'est-à-dire 1 450 €

Salaire moyen des hommes = 1 769 €

Comparaison : $1\,769 - 1\,450 = 319$ €

Le salaire moyen des hommes est supérieur à celui des femmes de 319 €, ce qui représente environ 22 % de plus.

2. Pour calculer la probabilité de choisir une femme au hasard, on a besoin de connaître l'effectif total de l'entreprise et l'effectif des femmes.

Effectif des femmes = 10 personnes

Effectif des hommes = 20 personnes

Effectif total = $10 + 20 = 30$ personnes

Soit F l'événement « Choisir une femme ». Alors

$$\begin{aligned}P(F) &= \frac{\text{Effectif des femmes}}{\text{Effectif total}} \\ &= \frac{10}{30} \\ &= \frac{1}{3} \\ &\approx 0,33\end{aligned}$$

La probabilité de choisir une femme au hasard dans cette entreprise est de $\frac{1}{3}$, soit environ 33 %.

3. Comme le salaire minimum des femmes est de 1 200 €, et que le salaire minimum de l'entreprise est de 1 000 €, ce dernier concerne forcément un homme. Pour déterminer le salaire le plus élevé de l'entreprise, on doit comparer le salaire maximum des femmes avec celui des hommes.

Salaire maximum des femmes = 2 100 €

Pour les hommes, on sait que l'étendue est de 2 400 € et que le salaire minimum de l'entreprise est de 1 000 €.

Si ce salaire minimum concerne un homme, alors :

$$\begin{aligned}&\text{Salaire maximum des hommes} \\ &= \text{Salaire minimum} + \text{Étendue} \\ &= 1\,000 + 2\,400 \\ &= 3\,400 \text{ €}\end{aligned}$$

Donc le salaire maximum des hommes est 3 400 €, qui est supérieur au salaire maximum des femmes.

Le salaire le plus élevé de l'entreprise est de 3 400 €.

4. Pour déterminer le nombre de personnes gagnant plus de 2 000 €, on doit compter combien de femmes et combien d'hommes sont dans ce cas.

Parmi les femmes, seule une femme gagne plus de 2 000 € (celle qui gagne 2 100 €).

Pour les hommes, on sait que la médiane est de 2 000 €. Comme les salaires des hommes sont tous différents et qu'il y a 20 hommes, exactement 10 hommes gagnent plus que 2 000 €.

Donc le nombre total de personnes gagnant plus de 2 000 € est $1 + 10 = 11$ personnes.



Exercice 7

Une série de cinq nombres a pour moyenne 69, pour médiane 83, pour mode 85 et pour étendue 70. Quelle est cette liste ?

Solution de l'exercice 7 Notons a, b, c, d et e les nombres de cette liste. On suppose que ces nombres sont ordonnés, c'est-à-dire que $a \leq b \leq c \leq d \leq e$.

Puisque la médiane de cette série est 83, on a $c = 83$.

De plus, la valeur la plus représentée de la série est 85, et donc $d = 85$ et $e = 85$.

L'étendue est 70, donc $e - a = 70$, donc $85 - a = 70$, c'est-à-dire $a = 15$.

Enfin, la moyenne des valeurs est 69, donc

$$\frac{15 + b + 83 + 85 + 85}{5} = 69$$

c'est-à-dire $\frac{268 + b}{5} = 69$, ou encore $268 + b = 345$, ou encore $b = 77$.

Donc la série est

$$15 - 77 - 83 - 85 - 85$$



Exercice 8

Un professeur de SVT demande aux 29 élèves d'une classe de 3^e de faire germer des graines de blé chez eux. Le professeur donne un protocole expérimental à suivre :

- mettre en culture sur du coton dans une boîte placée dans une pièce éclairée, de température entre 20°C et 25°C.
- arroser une fois par jour.
- il est possible de couvrir les graines avec un film transparent pour éviter l'évaporation de l'eau.

Le tableau ci-dessous donne les tailles des plantules (petites plantes) des 29 élèves à 10 jours après la mise en germination.

Taille en cm	0	8	12	14	16	17	18	19	20	21	22
Effectif	1	2	2	4	2	2	3	3	4	4	2

1. Combien de plantules ont une taille qui mesure au plus 12 cm ?
2. Donner l'étendue de cette série.
3. Calculer la moyenne de cette série. Arrondir au dixième près.
4. Déterminer la médiane de cette série et interpréter le résultat.
5. On considère qu'un élève a bien respecté le protocole si la taille de la plantule à 10 jours est supérieure ou égale à 14 cm. Quel pourcentage des élèves de la classe a bien respecté le protocole ?
6. Le professeur a fait lui-même la même expérience en suivant le même protocole. Il a relevé la taille obtenue à 10 jours de germination. Prouver que, si on ajoute la donnée du professeur à cette série, la médiane ne change pas.

Solution de l'exercice 8

1. Pour trouver le nombre de plantules qui mesurent au plus 12 cm, on doit additionner les effectifs des tailles 0 cm, 8 cm et 12 cm.

- Effectif pour 0 cm : 1 plantule
- Effectif pour 8 cm : 2 plantules
- Effectif pour 12 cm : 2 plantules

Nombre total de plantules mesurant au plus 12 cm :

$$1 + 2 + 2 = 5 \text{ plantules.}$$

2. L'étendue d'une série statistique est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale. Les valeurs maximale et minimale sont 22 et 0.

$$\text{Étendue} = 22 - 0 = 22 \text{ cm}$$

3. Pour calculer la moyenne de cette série, on multiplie chaque valeur par son effectif, on additionne tous ces produits, puis on divise par l'effectif total.

Taille (cm)	Effectif	Produit (Taille × Effectif)
0	1	$0 \times 1 = 0$
8	2	$8 \times 2 = 16$
12	2	$12 \times 2 = 24$
14	4	$14 \times 4 = 56$
16	2	$16 \times 2 = 32$
17	2	$17 \times 2 = 34$
18	3	$18 \times 3 = 54$
19	3	$19 \times 3 = 57$
20	4	$20 \times 4 = 80$
21	4	$21 \times 4 = 84$
22	2	$22 \times 2 = 44$
Total	29	481

$$\text{Moyenne} = \frac{481}{29} \approx 16,6 \text{ cm}$$

La taille moyenne des plantules est d'environ 16,6 cm.

4. Pour déterminer la médiane, puis on cherche la valeur correspondant au rang

$$\frac{29 + 1}{2} = 15$$

La médiane correspond au 15ème terme de la série ordonnée. D'après le tableau, la valeur de rang 15 est 18 cm.

La médiane est donc 18 cm.

Interprétation : La moitié des plantules a une taille inférieure ou égale à 18 cm, et l'autre moitié a une taille supérieure ou égale à 18 cm.

5. Pour calculer le pourcentage d'élèves ayant bien respecté le protocole, on doit compter combien d'élèves ont obtenu une plantule de taille supérieure ou égale à 14 cm.

Nombre d'élèves ayant bien respecté le protocole :

$$4 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 2 = 24 \text{ élèves}$$

$$\text{Pourcentage} = \frac{24}{29} \times 100 \approx 82,8 \%$$

Environ 82,8 % des élèves de la classe ont bien respecté le protocole.

6. Si on ajoute la donnée du professeur à cette série, l'effectif total passe de 29 à 30 (nombre pair).

Dans ce cas, la médiane sera la moyenne des 15ème et 16ème valeurs dans la série ordonnée.

La 15ème valeur est alors la taille 18cm, et la 16ème valeur correspond également à la taille 18 cm (car il y a 3 plantules de 18 cm).

Donc la médiane avec 30 valeurs serait

$$\frac{18 + 18}{2} = 18 \text{ cm}$$

La médiane reste inchangée à 18 cm, quelle que soit la valeur obtenue par le professeur.

