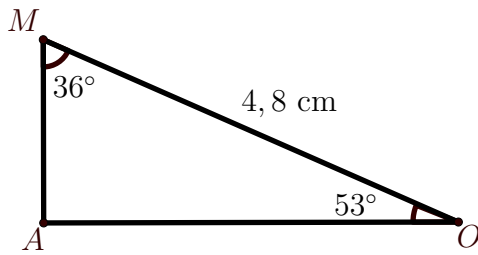


Séquence VII – Trigonométrie – cosinus



Exercice VII.1

On considère le triangle MAO ci-dessous.



Peut-on calculer OA ? et MA ? Si oui, comment?



Exercice VII.2

On rappelle que, dans la partie 1. B. du cours, on s'est proposé de déterminer la distance de la Terre à la Lune grâce à la méthode de la Grèce antique. La valeur que nous connaissons aujourd'hui est 384 400 km. Qu'en pensez-vous?

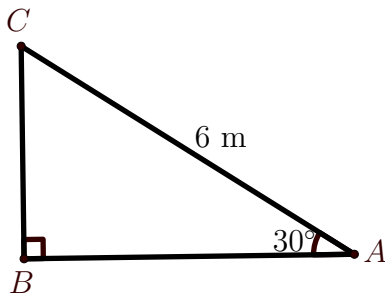


Exercice VII.3

■ DÉFINITION :

Résoudre un triangle, c'est donner toutes les mesures des angles du triangle et toutes les longueurs des côtés du triangle.

On considère le triangle ABC ci-dessous.

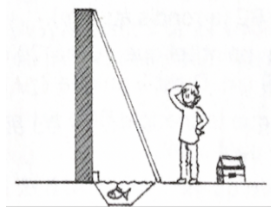


Résoudre le triangle ABC .



Exercice VII.4

Pour effectuer une réparation sur un toit, Esteban doit poser son échelle contre un mur. Pour qu'elle soit suffisamment stable et pour éviter de glisser, cette dernière doit former un angle d'au moins 65° avec le sol. L'échelle mesure 2,20 m. Gêné par un bassin à poissons rouges, Esteban n'a pu poser son échelle qu'à 1,20 m du mur.



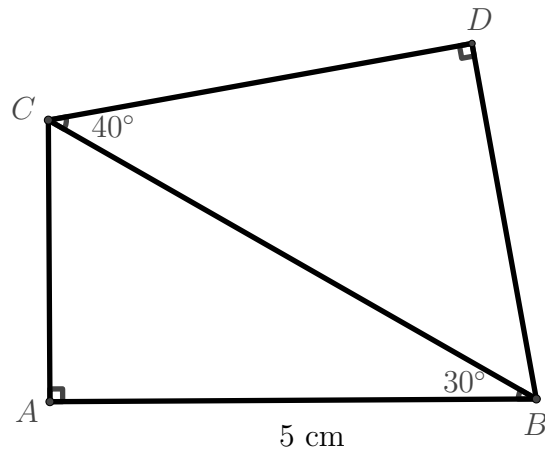
1. Cette échelle sera-t-elle suffisamment stable? Justifier.
2. À quelle distance maximale du mur doit-il placer son échelle pour qu'elle soit stable?



Exercice VII.5

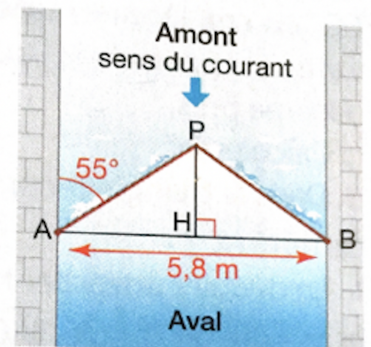
On considère la figure ci-dessous.

Déterminer la longueur DC , arrondie au dixième de millimètre.



Exercice VII.6

Certaines écluses ont des portes de même longueur dites « brusquées » qui forment un angle pointé vers l'amont de manière à résister à la pression de l'eau.



Elles sont représentées par les segments $[PA]$ et $[PB]$ ci-contre. Utiliser les données de la figure cette figure pour donner une valeur approchée au centième près de la longueur, en mètres, de ces portes.



Exercice interactif :

Déterminer des longueurs et des angles grâce au cosinus :



Séquence VII – Trigonométrie - sinus et tangente

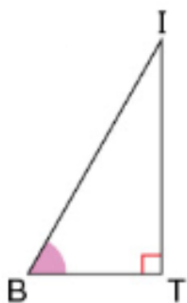
Exercice VII.7

TBI est le triangle rectangle ci-dessous. Compléter :

- L'hypoténuse est .
- Le côté opposé à l'angle $\widehat{TBI}$ est .
- Le côté adjacent à l'angle $\widehat{TBI}$ est .

Ainsi :

- $\cos(\widehat{TBI}) =$
- $\sin(\widehat{TBI}) =$
- $\tan(\widehat{TBI}) =$



Exercice VII.8

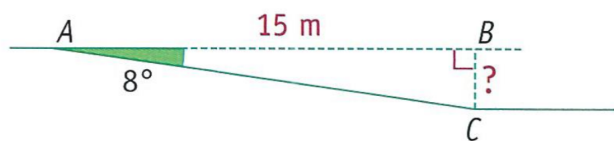
Soit POH un triangle rectangle en P tel que

$$\widehat{POH} = 39^\circ \text{ et } OH = 7 \text{ cm}$$

1. Déterminer la valeur exacte de la longueur PH .
2. En déduire la valeur arrondie au millimètre de la longueur PH .

Exercice VII.9

La rampe d'accès d'un parking souterrain fait un angle de 8° avec l'horizontale, comme le montre la représentation suivante :



Calculer la hauteur BC du parking. Arrondir le résultat au centimètre près.

Exercice VII.10

Vrai ou faux ? Répondre aux questions suivantes sans utiliser la calculatrice. Justifier les réponses :

- $\sin(58^\circ) = 2,5$
- On peut trouver deux mesures d'angles α et β strictement comprises entre 0 et 90 telles que :
 $\cos(\alpha) + \sin(\beta) = 3$

Exercice VII.11

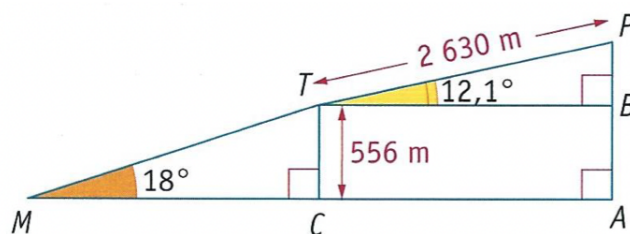
Soit PIC un triangle tel que

$$PI = 4 \text{ cm}, IC = 10,4 \text{ cm et } PC = 9,6 \text{ cm}$$

1. Démontrer que le triangle PIC est rectangle.
2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{PIC}$ de deux manières différentes. Arrondir le résultat.

Exercice VII.12

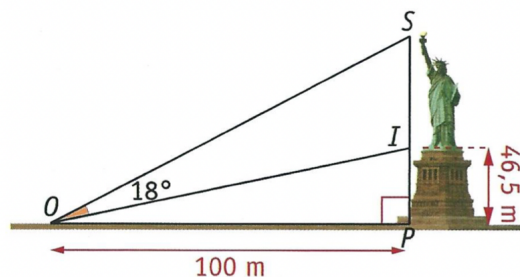
Le téléphérique du Pic du Midi de Bigorre (dans les Pyrénées) comporte deux tronçons. Le premier part de la Mongie (M) à 1753 m d'altitude et arrive à la gare de Taoulet (T). Le dénivelé est de 556 m. La deuxième tronçon repart du Taoulet (T) et arrive à la gare du Pic du Midi (P). Sur ce tronçon, le téléphérique parcourt 2630 m.



1. Calculer la longueur MT du premier tronçon.
2. À quelle altitude se situe la gare du Pic du Midi ? Justifier ta réponse.

Exercice VII.13

On considère un schéma de la statue de la Liberté ci-dessous.



Calculer une valeur approchée de la hauteur SI de la statue de la Liberté.

Exercice interactif :

Pour réviser la trigonométrie :



Exercice n° 1

C'est impossible, car le triangle n'est pas rectangle.

En effet, dans un triangle, la somme des angles est égale 180° . Donc $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180^\circ$, c'est-à-dire $\widehat{ABC} + 36^\circ + 53^\circ = 180^\circ$, c'est-à-dire $\widehat{ABC} + 89^\circ = 180^\circ$, c'est-à-dire $\widehat{ABC} = 91^\circ$. Donc ABC n'est pas un triangle rectangle, et donc on ne peut pas appliquer le cosinus.

Exercice n° 2

On sait que le triangle HTL est rectangle en H , que $\widehat{HTL} = 89,12^\circ$ et que $TH = 6400$ km.

Donc, par définition du cosinus, $\cos(\widehat{HTL}) = \frac{HT}{TL}$, c'est-à-dire $\cos(89,12^\circ) = \frac{6400}{TL}$, c'est-à-dire $\frac{\cos(89,12^\circ)}{1} = \frac{6400}{TL}$. Donc $6400 \times 1 = \cos(89,12^\circ) \times TL$, c'est-à-dire

$$TL = \frac{6400}{\cos(89,12)}.$$

Grâce à la calculatrice, on obtient $TL \approx 416\,713$ km.

Donc l'écart entre la valeur actuelle et celle trouvée au II^{ème} avant J.-C. est environ de $416\,713 - 384\,400 = 32\,313$ km, c'est-à-dire une marge d'erreur d'environ 10 %. Pour une valeur trouvée il y a 2 200 ans, c'est plutôt très bien !!

Exercice n° 3

- Commençons par déterminer AB . Dans le triangle ABC rectangle en B , on a $\cos(\widehat{CAB}) = \frac{AB}{AC}$, c'est-à-dire $\cos(30^\circ) = \frac{AB}{6}$, c'est-à-dire $\frac{\cos(30^\circ)}{1} = \frac{AB}{6}$, et donc $AB = \cos(30^\circ) \times 6$. D'après la calculatrice, on trouve $AB \approx 5,20$ m.

- On détermine d'abord la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$. On sait que $\widehat{ABC} = 90^\circ$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Or, la somme des angles dans un triangle est égale à 180° . Donc $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$, c'est-à-dire $90^\circ + 30^\circ + \widehat{ACB} = 180^\circ$, c'est-à-dire $120^\circ + \widehat{ACB} = 180^\circ$, c'est-à-dire $\widehat{ACB} = 60^\circ$.

- On cherche à déterminer BC . Pour cela, on utilise le cosinus. On a $\cos(\widehat{BCA}) = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{6}$.

De plus, on sait que $\widehat{BCA} = 60^\circ$.

Donc $\cos(60^\circ) = \frac{BC}{6}$. D'après la calculatrice, on trouve

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}, \text{ et donc } \frac{1}{2} = \frac{BC}{6}.$$

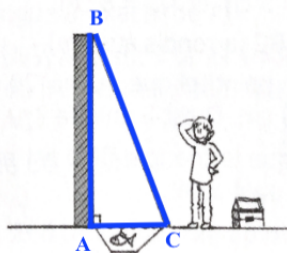
On obtient donc $BC = 3$ m.

Exercice n° 4

1 Pour effectuer une réparation sur un toit, Esteban doit poser son échelle contre un mur. Pour qu'elle soit suffisamment stable et pour éviter de glisser, cette dernière doit former un angle d'au moins 65° avec le sol. L'échelle mesure 2,20 m. Gêné par un bassin à poissons rouges, Esteban n'a pu poser son échelle qu'à 1,20 m du mur.

a. Cette échelle sera-t-elle suffisamment stable ? Justifie.

b. À quelle distance maximale du mur doit-il placer son échelle pour qu'elle soit stable ?



a) On représente la situation par un triangle BAC rectangle en A . On sait que $CA = 1,2$ m et que $CB = 2,2$ m.

Donc $\cos(\widehat{BCA}) = \frac{CA}{CB} = \frac{1,2}{2,2}$. Ainsi $\widehat{BCA} = \arccos\left(\frac{1,2}{2,2}\right)$. D'après la calculatrice, on obtient $\widehat{BCA} \approx 56,94^\circ$.

On a $56 < 65$, donc l'échelle n'est pas suffisamment stable.

b) La distance maximale du mur à laquelle il faut place l'échelle est celle telle que l'angle $\widehat{BCA} = 65^\circ$.

On a que l'échelle mesure 2,2 m, et on cherche la distance au mur. On a $\cos(65^\circ) = \frac{CA}{2,2}$, c'est-à-dire $CA = 2,2 \times \cos(65^\circ)$. Grâce à la calculatrice, on trouve $CA \approx 0,92976$ m.

Exercice n° 5

- Commençons par déterminer BC .

Dans le triangle ABC rectangle en A , on sait que $AB = 3$ cm et $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Alors $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$,

c'est-à-dire $\cos(30^\circ) = \frac{5}{BC}$.

D'après l'égalité des produits en croix, $BC = \frac{5}{\cos(30^\circ)}$.

D'après la calculatrice, on obtient $BC \approx \frac{5}{0,866}$, c'est-à-dire $BC \approx 5,773$ cm.

- Déterminons la valeur de CD :

Dans le triangle BCD rectangle en D , on sait que $BC = \frac{5}{\cos(30^\circ)}$ cm et $\widehat{BCD} = 40^\circ$.

attention à bien réutiliser la valeur exacte!!!

Alors $\cos(\widehat{BCD}) = \frac{CD}{BC}$, c'est-à-dire $\cos(40^\circ) = \frac{CD}{\frac{5}{\cos(30^\circ)}}$.

Donc $CD = \frac{5}{\cos(30^\circ)} \times \cos(40^\circ)$.

D'après la calculatrice, on obtient $CD \approx \frac{5}{0,866} \times 0,766$, c'est-à-dire $BC \approx 4,423$ cm, c'est-à-dire $BC \approx 4,42$ cm d'après l'arrondi demandé dans l'énoncé.

Exercice n° 6

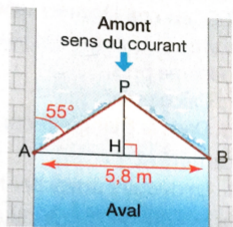
2 Prendre des initiatives

Modéliser • Communiquer

Certaines écluses ont des portes dites « busquées » qui forment un angle pointé vers l'amont de manière à résister à la pression de l'eau.

Elles sont représentées par les segments $[PA]$ et $[PB]$ ci-contre.

Utiliser les données de ce schéma pour donner une valeur approchée au centième près de la longueur, en m, de ces portes.



Dans le triangle APB isocèle en P , on sait que la hauteur et la médiatrice issues du sommet principal sont confondues. Donc (PH) est aussi la médiatrice de $[AB]$, et donc

$$AH = HB = \frac{5,8}{2} = 2,9 \text{ m.}$$

De plus, on sait que l'angle entre le mur et l'écluse mesure 55° , donc $\widehat{PAH} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$.

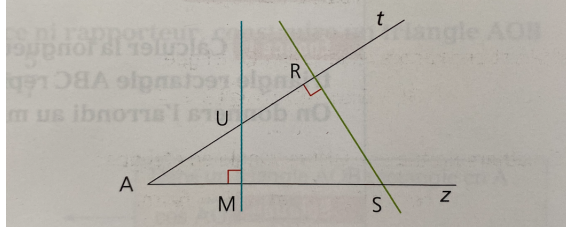
Dans le triangle rectangle APH rectangle en H , on sait que $\widehat{PAH} = 35^\circ$ et que $AH = 2,9 \text{ m}$. Donc, d'après la définition du cosinus, $\cos(\widehat{PAH}) = \frac{AH}{AP}$, c'est-à-dire $\cos(35^\circ) = \frac{2,9}{AP}$, c'est-à-dire, d'après l'égalité des produits en croix, $AP \times \cos(35^\circ) = 2,9 \times 1$, et donc $AP = \frac{2,9}{\cos(35^\circ)}$. Grâce à la calculatrice, on obtient $AP \approx 3,54 \text{ m}$. Ainsi, chacune des portes mesure environ $3,54 \text{ m}$.

Exercices bonus

1 Exercices

a) Exercices

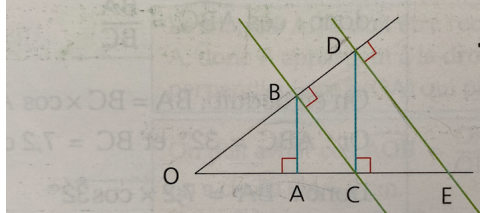
Écrire $\cos \widehat{tAz}$ sous la forme d'un quotient de deux longueurs, de deux manières différentes.



Dans le triangle UAM rectangle en M ,
on a $\cos(tAz) = \frac{AM}{AU}$.

Dans le triangle SAR rectangle en R ,
on a $\cos(tAz) = \frac{AR}{AS}$.

Dans la figure ci-dessous : $OA = 4$ cm et $OB = 5$ cm.



1 a. Démontrer l'égalité : $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC}$.

b. En déduire OC .

2 En suivant la même démarche que dans la question 1, calculer OD et OE .

1.a) Dans le triangle BOA rectangle en A , on a $\cos(\widehat{O}) = \frac{OA}{OB}$. Dans le triangle BOC rectangle en B , on a $\cos(\widehat{O}) = \frac{OB}{OC}$.

Donc $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC}$.

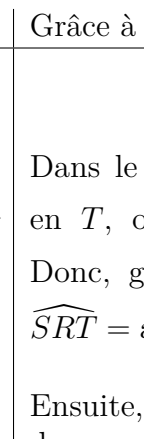
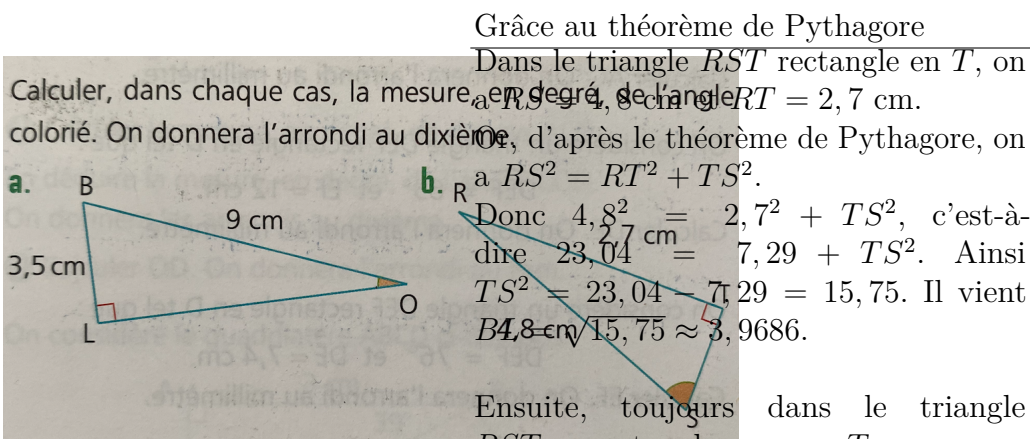
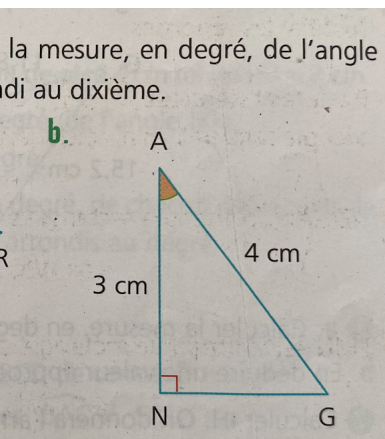
b) On sait que $OA = 4$ cm et $OB = 5$ cm
et $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC}$. Donc $\frac{4}{5} = \frac{5}{OC}$.
Donc, par l'égalité des produits en croix,
 $OC = \frac{25}{4} = 6,25$ cm.

2. Dans le triangle COD rectangle en C , on a $\cos(\widehat{O}) = \frac{OC}{OD}$. Dans le triangle DOE rectangle en D , on a $\cos(\widehat{O}) = \frac{OD}{OE}$. Donc $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OD} = \frac{OD}{OE}$.

On sait que $OA = 4$, $OB = 5$ cm et $OC = 6,25$ d'après la question 1.

Donc, de l'égalité $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$, on obtient $OD = \frac{5 \times 6,25}{4} = 7,8125$ cm.

De même, de l'égalité $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OE}$, on obtient $OE = \frac{5 \times 7,8125}{4} = 9,765625$ cm.



Correction :

- Dans le triangle TIR rectangle en I , on a $\cos(\widehat{TRI}) = \frac{RI}{TR} = \frac{4,3}{5}$.
Donc $\widehat{TRI} = \arccos\left(\frac{4,3}{5}\right)$. Grâce à calculatrice, on obtient $\widehat{TRI} \approx 30,7$.
- Dans le triangle NAG rectangle en N , on a $\cos(\widehat{NAG}) = \frac{AN}{AG} = \frac{3}{4}$.
Donc $\widehat{NAG} = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$. Grâce à calculatrice, on obtient $\widehat{NAG} \approx 41,4$.
- Dans le triangle BLO rectangle en L , on connaît le côté opposé de l'angle coloré et l'hypoténuse. Il y a deux méthodes pour déterminer la mesure de l'angle coloré, que l'on présentera à gauche et à droite.

Grâce au théorème de Pythagore

Dans le triangle BLO rectangle en L , on a $BL = 3,5$ cm et $BO = 9$ cm.

Or, d'après le théorème de Pythagore, on a $BO^2 = BL^2 + LO^2$.

Donc $9^2 = BL^2 + 3,5^2$, c'est-à-dire $81 = BL^2 + 12,25$. Ainsi $BL^2 = 81 - 12,25 = 68,75$. Il vient $BL = \sqrt{68,75} \approx 8,2916$.

Ensuite, toujours dans le triangle BLO rectangle en L , on a $\cos(\widehat{BOL}) = \frac{OL}{OB} = \frac{8,2916}{9}$. Donc $\widehat{LOB} = \arccos\left(\frac{8,2916}{9}\right)$. Grâce à calculatrice, on obtient $\widehat{LOB} \approx 22,9$.

Grâce à l'angle complémentaire

Dans le triangle rectangle BOL rectangle en L , on a $\cos(\widehat{LBO}) = \frac{BL}{BO} = \frac{3,5}{9}$.
Donc, grâce à la calculatrice, on trouve $\widehat{LBO} = \arccos\left(\frac{3,5}{9}\right) = 67,1$.

Ensuite, on sait que les angles aigus dans un triangle rectangle sont des angles complémentaires, donc $\widehat{LOB} + \widehat{LBO} = 90^\circ$, c'est-à-dire $\widehat{LOB} + 67,1^\circ = 90^\circ$, et donc $\widehat{LOB} = 22,9$.

- Dans le triangle RST rectangle en T , on connaît le côté opposé de l'angle coloré et l'hypoténuse. Il y a deux méthodes pour déterminer la mesure de l'angle coloré, que l'on présentera à gauche et à droite.

Exercice plus difficile

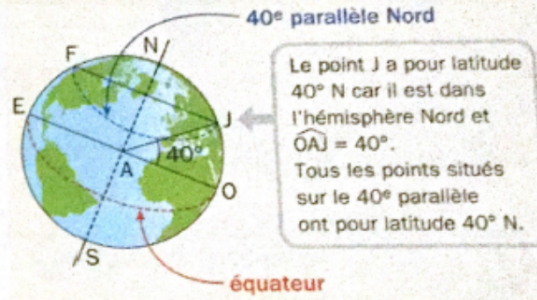
3 Latitude terrestre ■■■

La surface de la Terre est assimilée à une sphère de 6 370 km de rayon.

1 Des lignes imaginaires

Les **parallèles** sont des cercles imaginaires qui découpent le globe terrestre en tranches perpendiculaires à l'axe de la Terre. L'**équateur** est un parallèle particulier : il partage la Terre en deux hémisphères, le Nord et le Sud. Les parallèles permettent de donner la **latitude** d'un point sur la Terre.

2 Parallèles, latitudes et angles



- Calculer l'arrondi au km de la longueur du 40° parallèle, puis du 70° parallèle.
- Exprimer en fonction de x la longueur du x° parallèle.

Sur la représentation de l'énoncé, notons C le milieu du segment $[FJ]$. D'après l'énoncé, un parallèle est un cercle. Donc la longueur d'un parallèle dépend du rayon de ce cercle, donc de la longueur CJ .

s

On remarque que les angles $\widehat{CJA}$ et $\widehat{JAO}$ sont des angles alternes-internes.

Or, les droites (CJ) et (AO) sont parallèles. Donc $\widehat{CJA} = \widehat{JAO}$.

De plus, d'après la représentation, $[NA] \perp [FJ]$. Donc, dans le triangle CJA rectangle en C , on a $\cos(\widehat{CJA}) = \frac{CJ}{AJ}$. D'après l'énoncé, on sait que le rayon

de la Terre JA est 6 370 km. Donc $\cos(\widehat{CJA}) = \frac{CJ}{6370}$.

a) On s'intéresse au 40° parallèle. Ainsi $\widehat{JAO} = \widehat{CJA} = 40^\circ$. Donc $\cos(40^\circ) = \frac{CJ}{6370}$, c'est-à-dire $CJ = 6370 \times \cos(40^\circ)$. Ainsi, la longueur du 40° parallèle est $2\pi \times CJ$, où CJ est le rayon du cercle, c'est-à-dire $2\pi \times 6370 \times \cos(40^\circ)$. Grâce à la calculatrice, on trouve environ 30 660 km.

On s'intéresse ensuite au 70° parallèle. Ainsi $\widehat{JAO} = \widehat{CJA} = 70^\circ$. Donc $\cos(70^\circ) = \frac{CJ}{6370}$, c'est-à-dire $CJ = 6370 \times \cos(70^\circ)$. Ainsi, la longueur du 70° parallèle est $2\pi \times CJ$, où CJ est le rayon du cercle, c'est-à-dire $2\pi \times 6370 \times \cos(70^\circ)$. Grâce à la calculatrice, on trouve environ 13 689 km.

b) On s'intéresse d'après au x° parallèle. Par le même raisonnement que précédemment, on obtient que la longueur du x° parallèle est $2\pi \times 6370 \times \cos(x^\circ)$, c'est-à-dire $12\,740\pi \cos(x^\circ)$.

