

Radicaux

1. Racine carrée d'un nombre positif

Exemple :

On se pose la question suivante : quels sont les nombres x dont le carré est 4 ?

$2^2 = (-2)^2 = 4$, donc 2 et -2 sont deux nombres dont le carré est 4. Peut-on en trouver d'autres ?

Les nombres de carré 4 sont les solutions de l'équation : $x^2 = 4$.

$$\begin{aligned}x^2 = 4 &\iff x^2 - 4 = 0 \\&\iff x^2 - 2^2 = 0 \\&\iff (x - 2)(x + 2) = 0 \\&\iff x - 2 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \\&\iff x = 2 \text{ ou } x = -2\end{aligned}$$

Donc il existe exactement deux nombres dont le carré est 4, qui sont 2 et -2 .

Celui des deux qui est positif est appelé la *racine carrée* de 4, c'est-à-dire 2 est la racine carrée de 4.

Le nombre -2 est l'opposé de la racine carrée de 4.

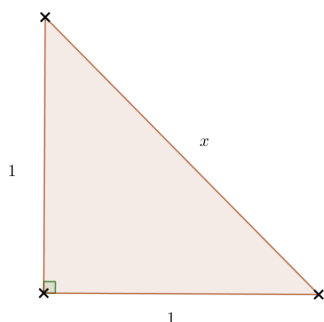
On note $2 = \sqrt{4}$ et $-2 = -\sqrt{4}$.

Exemple :

Quels sont les nombres x dont le carré est 2 ? S'il en existe, ce sont les solutions de l'équation : $x^2 = 2$. Mais peut-on trouver des solutions à cette équation ?

On peut remarquer que si l'on appelle x la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle de côté 1, d'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$



Il est donc certain qu'il existe un nombre x positif dont le carré est 2 : c'est la longueur de l'hypoténuse de ce triangle, exprimée dans la même unité que la longueur de ses côtés. Ce nombre est positif et son carré est 2, on va le noter $\sqrt{2}$.

On peut ensuite écrire :

$$\begin{aligned}x^2 = 2 &\iff x^2 = (\sqrt{2})^2 \\&\iff x^2 - (\sqrt{2})^2 = 0 \\&\iff (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 \\&\iff x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}\end{aligned}$$

Cette résolution montre qu'il existe exactement deux nombres dont le carré est 2, qui sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Si l'on tape $\sqrt{2}$ à la calculatrice, on obtient à l'affichage : 1,414213562. Mais ce nombre est-il bien la valeur de $\sqrt{2}$?

Si l'on effectue le produit

$$1,414213562 \times 1,414213562$$

il est certain que le chiffre le plus à droite du produit sera 4 :

$$\begin{array}{r}1,414213562 \\ \times 1,414213562 \\ \hline \text{.....} 4 \\ \text{.....} \\ \text{.....} \\ \hline \text{.....} 4\end{array}$$

Donc le résultat de cette multiplication n'est pas 2 et donc : $\sqrt{2} \neq 1,414213562$

Ce nombre est une *valeur approchée* de $\sqrt{2}$.

■ PROPRIÉTÉ : (admis)

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'on ne peut pas l'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des nombres entiers, avec b non nul.
A fortiori, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

Remarque : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal, il faut donc l'utiliser dans les calculs sous la forme $\sqrt{2}$.

Plus généralement, lorsqu'une racine carrée n'est pas un nombre rationnel, il faut savoir mener des calculs avec son écriture sous forme de radical. On va approfondir

cette notion dans la troisième partie.

Remarque : Le carré de tout nombre x (connu en troisième) est un nombre positif ou nul : en effet, si x est positif ou nul, alors $x \times x$ est positif ou nul, et de même si x est négatif. Par conséquent, seuls les nombres a positifs ou nuls peuvent avoir une racine carrée.

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Si a un nombre positif ou nul, alors a admet une racine carrée.

■ DÉFINITION :

Soit a un nombre positif ou nul.

La racine carrée de a est le nombre positif x dont le carré est a . On note : $x = \sqrt{a}$.

Remarque : Pour tout nombre positif ou nul a , $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples :

Réduire :

$$A = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$A = \frac{2}{3}$$

$$B = 3\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$$

$$B = -4\sqrt{2}$$

$$C = \sqrt{5^2 - 4^2}$$

$$C = \sqrt{25 - 16}$$

$$C = \sqrt{9}$$

$$C = 3$$

$$D = \sqrt{(8+1)^2}$$

$$D = \sqrt{9^2}$$

$$D = \sqrt{81}$$

$$D = 9$$

$$E = \sqrt{(-7+1)^2}$$

$$E = \sqrt{(-6)^2}$$

$$E = \sqrt{36}$$

$$E = 6$$

$$F = 5\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} + (\sqrt{2})^2$$

$$F = 5\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} + 2$$

$$F = 5\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 2$$

$$F = \sqrt{2} \left(5 + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{3} \left(\frac{2}{3} + 6 \right) + 2$$

$$F = \frac{11}{2}\sqrt{2} - \frac{16}{3}\sqrt{3} + 2$$

$$G = 5(\sqrt{2})^2 \times \sqrt{3}$$

$$G = 5 \times 2 \times \sqrt{3}$$

$$G = 10\sqrt{3}$$

Exemples :

$$H = (2\sqrt{5} - 3)^2$$

$$H = (2\sqrt{5})^2 - 2 \times 2\sqrt{5} \times 3 + 3^2$$

$$H = 2^2 (\sqrt{5})^2 - 4\sqrt{5} \times 3 + 9$$

$$H = 4 \times 5 - 12\sqrt{5} + 9$$

$$H = 20 - 12\sqrt{5} + 9$$

$$H = 29 - 12\sqrt{5}$$

$$I = (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

$$H = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$H = 5 - 3$$

$$H = 2$$

$$J = (2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})(2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})$$

$$J = (2\sqrt{5})^2 - 3^2$$

$$J = 4 \times 5 - 9$$

$$J = 11$$

2. Équations de la forme $x^2 = a$

Exemple : Cas où $a = 5$

$$\begin{aligned}x^2 = 5 &\iff x^2 = (\sqrt{5})^2 \\&\iff x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0 \\&\iff (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \\&\iff x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}\end{aligned}$$

Donc l'équation admet exactement deux solutions. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est l'ensemble constitué des nombres $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$, ce qu'on résume en écrivant :

$$\mathcal{S} = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$$

Exemple : Cas où $a = 0$

$$\begin{aligned}x^2 = 0 &\iff x \times x = 0 \\&\iff x = 0 \text{ ou } x = 0 \\&\iff x = 0\end{aligned}$$

Donc l'équation admet une unique solution :

$$\mathcal{S} = \{0\}$$

Exemple : Cas où $a = -1$

$x^2 = -1$ est une équation qui n'admet aucune solution parmi les nombres connus en 3^e.

En effet, quel que soit le nombre x , le nombre x^2 est positif ou nul, il ne peut donc être égal à -1 .

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \emptyset$$

■ PROPRIÉTÉ :

Soit a un nombre quelconque.

- Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet alors deux solutions distinctes :

$$\mathcal{S} = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$$

- Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet une unique solution :

$$\mathcal{S} = \{0\}$$

- Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution :

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Exemple :

Résoudre les équations suivantes.

1. $x^2 = 7$

$$\mathcal{S} = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$$

2. $4x^2 = 9 \iff x^2 = \frac{9}{4}$

$$\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{\frac{9}{4}}; \sqrt{\frac{9}{4}}\right\} = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$$

3. $5x^2 = 9x^2 + 4$

$$\begin{aligned}5x^2 = 9x^2 + 4 &\iff -4x^2 = 4 \\&\iff x^2 = -1\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

4. $5x^2 = 2 - \sqrt{2} \iff x^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{5}$

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \left\{-\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{5}}; \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{5}}\right\} \\&\text{car } \frac{2 - \sqrt{2}}{5} > 0\end{aligned}$$

5. $x^2 = \pi - 3$

$$\mathcal{S} = \{-\sqrt{\pi - 3}; \sqrt{\pi - 3}\} \text{ car } \pi - 3 > 0$$

6. $(2x + 1)^2 = 3$

$$\begin{aligned}(2x + 1)^2 = 3 &\iff 2x + 1 = \sqrt{3} \text{ ou } 2x + 1 = -\sqrt{3} \\&\iff 2x = \sqrt{3} - 1 \text{ ou } 2x = -\sqrt{3} - 1 \\&\iff x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \text{ ou } x = \frac{-\sqrt{3} - 1}{2}\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}; \frac{-\sqrt{3} - 1}{2}\right\}$$

7. $(2x + 1)(x - 3) = -5x$

$$\begin{aligned}(2x + 1)(x - 3) = -5x &\iff 2x^2 - 6x + x - 3 = -5x \\&\iff 2x^2 - 5x - 3 = -5x \\&\iff 2x^2 - 3 = 0 \\&\iff 2x^2 = 3 \\&\iff x^2 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$

3. Formules de calculs usuels

A. Avec la somme

Comparer $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ et $\sqrt{9+16}$.

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Donc } \sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$$

Est-il vrai que pour tous nombres positifs a et b :

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}?$$

L'égalité n'est pas vraie pour tout réels a et b , on a donné un contre-exemple ci-dessus.

B. Avec la produit

Comparer $\sqrt{9} \times \sqrt{16}$ et $\sqrt{9 \times 16}$.

$$\sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$$

$$\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12$$

$$\text{Donc } \sqrt{9} \times \sqrt{16} = \sqrt{9 \times 16}$$

Peut-on affirmer que pour tous nombres positifs a et b :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}?$$

Pour l'instant, on ne peut pas, il faut le démontrer.

■ PROPRIÉTÉ :

Pour tous nombres positifs ou nuls a et b :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Démonstration. Soient a et b deux nombres positifs.

Quelle est par définition la racine carrée du nombre ab ?

La racine carrée du nombre ab est le nombre positif qui, élevé au carré, donne ab .

Le nombre $\sqrt{a}\sqrt{b}$ est-il la racine carrée de ab ?

$\sqrt{a}\sqrt{b}$ est positif et

$$\begin{aligned} (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 \\ &= ab \end{aligned}$$

Donc $\sqrt{a}\sqrt{b}$ est bien la racine carrée de ab , et donc

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

□

Exemples :

$$\bullet \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

En s'inspirant de ce calcul, réduire :

$$\bullet A = \sqrt{8} + 3\sqrt{50} - 17\sqrt{2}$$

Voir à la page suivante.

$$\bullet B = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12}$$

Voir à la page suivante.

C. Avec la quotient

Comparer $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}$ et $\sqrt{\frac{9}{16}}$

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} \text{ et } \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}. \text{ Donc } \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}}$$

Peut-on affirmer que pour tous nombres positifs a et b , avec $b \neq 0$:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}?$$

Pour l'instant, on ne peut pas, il faut la démontrer.

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Pour tout nombre positif ou nul a et tout nombre strictement positif b :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples :

$$\bullet \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = \frac{9}{4}$$

$$\bullet \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

On préfère en général ne pas avoir de radical au dénominateur d'une fraction, d'où cette réécriture de $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ sous la forme $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

• En s'inspirant de l'exemple précédent écrire sans radical au dénominateur : $C = \frac{2}{5} \times \sqrt{\frac{50}{9}} \times \sqrt{\frac{27}{100}}$.

Voir à la page suivante.

Correction des calculs

$$A = \sqrt{4 \times 2} + 3\sqrt{25 \times 2} - 17\sqrt{2}$$

$$A = \sqrt{4} \times \sqrt{2} + 3 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 17\sqrt{2}$$

$$A = 2\sqrt{2} + 3 \times 5\sqrt{2} - 17\sqrt{2}$$

$$A = 2\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 17\sqrt{2}$$

$$A = 0$$

$$B = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{9 \times 3} + 5\sqrt{4 \times 3}$$

$$B = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{9} \times \sqrt{3} + 5\sqrt{4} \times \sqrt{3}$$

$$B = 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3}$$

$$B = 8\sqrt{3}$$

$$C = \frac{2}{5} \times \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{9}} \times \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{100}}$$

$$C = \frac{2}{5} \times \frac{5\sqrt{2}}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{10}$$

$$C = \frac{2 \times 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{3}}{5 \times 3 \times 10}$$

$$C = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{10}$$

$$C = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{5}$$

$$C = \frac{\sqrt{6}}{5}$$