

Géométrie dans l'espace

1. Définitions et vocabulaire

■ DÉFINITION :

Un **solide de l'espace** est un objet en relief, en trois dimensions.

Il possède une **longueur**, une **hauteur** et une **profondeur**.

■ DÉFINITION :

Un **polyèdre** est un solide dont toutes les faces sont des polygones.

■ VOCABULAIRE :

L'espace à l'intérieur du solide est appelé son **volume**.

■ DÉFINITION :

Un **patron** d'un solide est une figure plane qui permet de reconstituer ce solide après des pliage et des collages.

■ VOCABULAIRE :

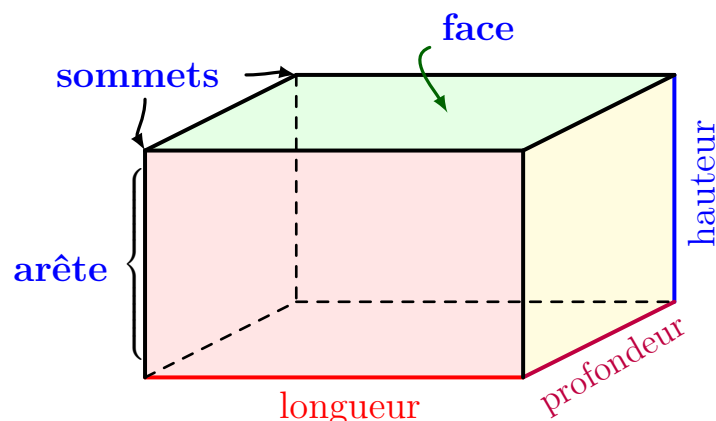
Une **face** est une figure plane qui constitue une partie de la surface d'un solide.

■ VOCABULAIRE :

Une **arête** est un segment qui relie deux faces.

■ VOCABULAIRE :

Un **sommet** est une extrémité d'une arête.

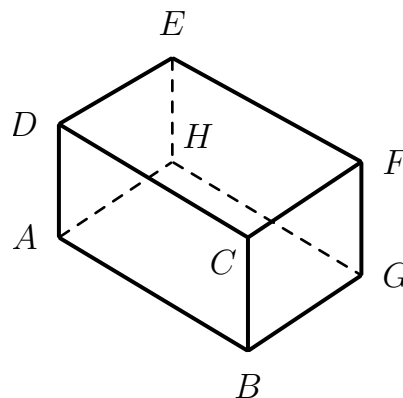


■ DÉFINITION :

La face sur laquelle repose le polyèdre est appelée la **base** du polyèdre.

Exemple :

On considère le solide ci-dessous, représenté en perspective cavalière, qui s'apparente à une boîte dont les faces sont des rectangles :



1. Nommer deux arêtes visibles :

$[AD]$ et $[CF]$.

2. Nommer deux arêtes cachées :

$[GH]$ et $[HE]$.

3. Les droites (AD) et (AH) sont-elles perpendiculaires ?

Oui.

4. Les droites (EH) et (HF) sont-elles perpendiculaires ?

Non.

5. Les droites (EH) et (BC) sont-elles parallèles ?

Oui.

6. Citer une droite perpendiculaire à la droite (CE)

(EH)

7. Quelle est la nature du quadrilatère $ADEH$?

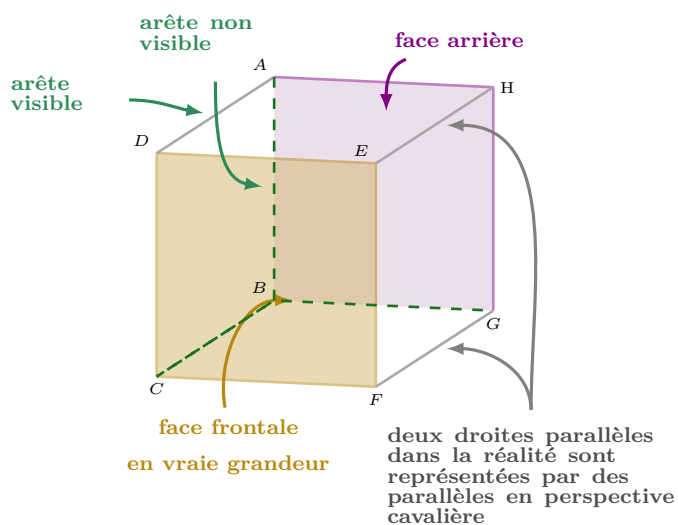
Un rectangle

2. Perspective cavalière

Pour représenter une figure de l'espace sur une feuille (donc en deux dimensions) tout en gardant une « impression de 3 dimensions », on utilise la **perspective cavalière**¹.

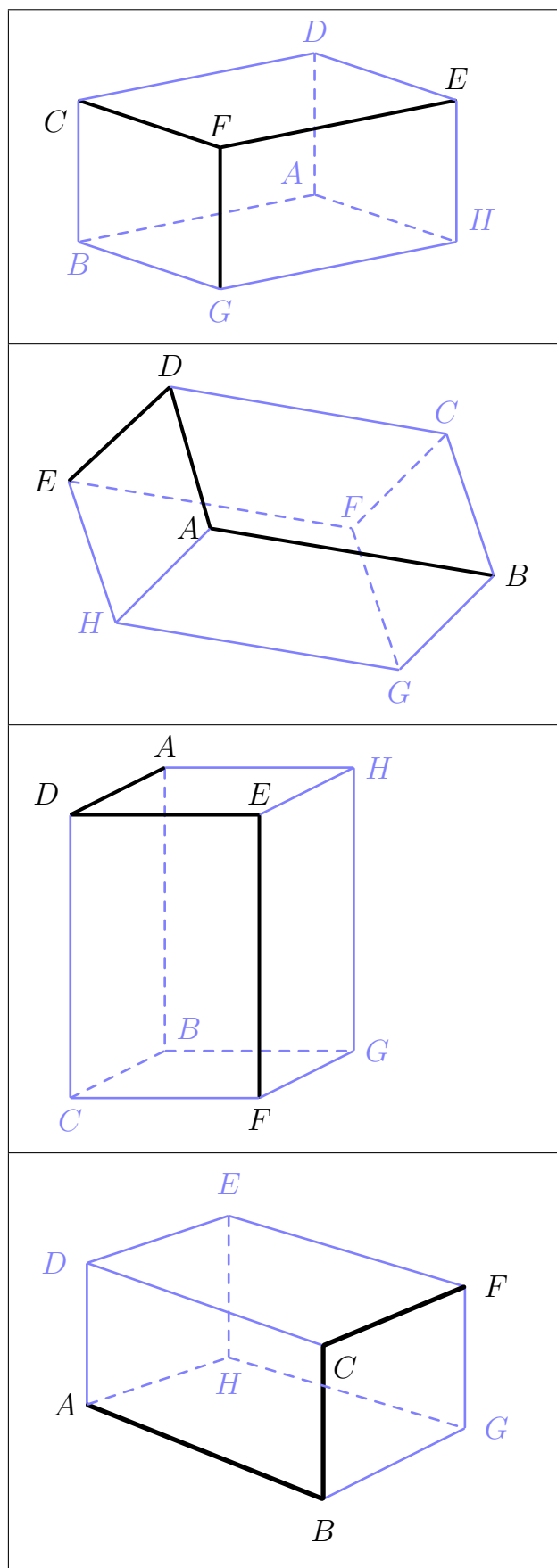
Grâce aux règles suivantes, on pourra représenter tout solide :

- La face frontale est représentée en **vraie** grandeur.
- Les **parallèles** restent **parallèle**
- Les arêtes **visibles** sont représentées en trait plein.
- Les arêtes **cachées** sont représentées en pointillés.
- Les proportions sont respectées.



Exemple :

Terminer la représentation en perspective cavalière :



1. L'origine de l'expression perspective cavalière est militaire. C'est la vue que l'on avait à partir d'un cheval, puis d'une position élevée destinée à voir (ou tirer) au loin, appelée cavalier pour cette raison.

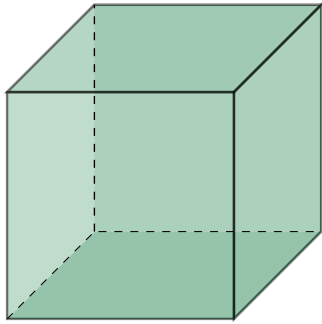
3. Présentation des solides usuels

A. Cube

■ DÉFINITION :

Un **cube** est un polyèdre dont les six faces sont des carrés.

Exemple :

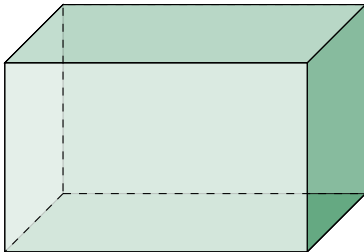


B. Parallélépipède rectangle

■ DÉFINITION :

Un **parallélépipède rectangle** (ou **pavé droit**) est un polyèdre dont les six faces sont des rectangles.

Exemple :

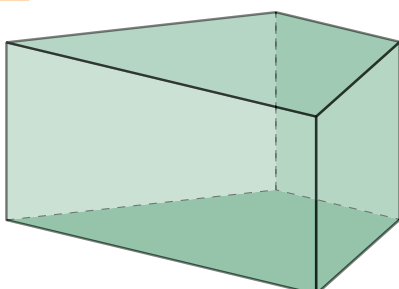


C. Prisme droit

■ DÉFINITION :

Un **prisme droit** est un solide qui a deux faces parallèles et superposables (appelées **bases**) qui sont des polygones, et des rectangles pour les autres faces (appelées **faces latérales**).

Exemple :



D. Pyramides

■ DÉFINITION :

Une **pyramide** est un solide dont la base est un polygone et les faces latérales sont des triangles ayant un sommet commun.

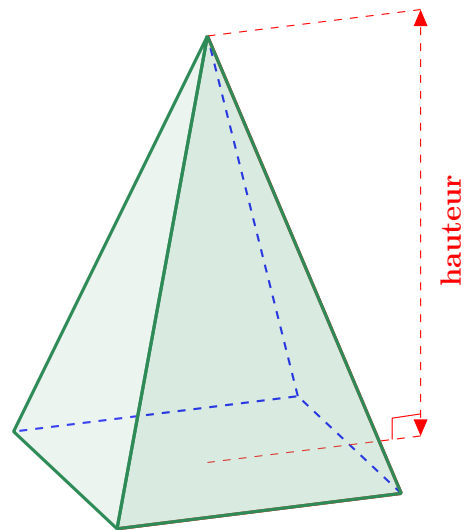
■ DÉFINITION :

Une pyramide est **régulière** si la base est un polygone régulier **et** si les faces latérales sont des triangles isocèles identiques.

Remarque : On peut aussi dire qu'une pyramide est **régulière** si la base est un polygone régulier **et** la hauteur issue du sommet de la pyramide a son pied au centre du polygone de base.

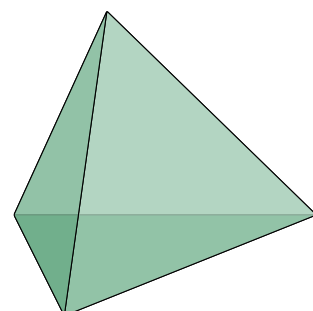
Si la base est un carré, on peut avoir le polyèdre suivant, appelé **pyramide à base carrée** :

Exemple :



Si la base est un triangle, on dit que le polyèdre est un **tétraèdre**.

Exemple :

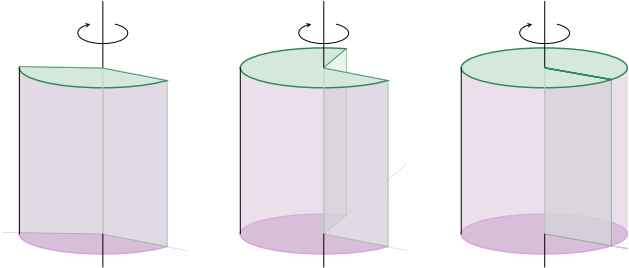




E. Cylindre de révolution

■ DÉFINITION :

Un **cylindre de révolution** est un solide obtenu en faisant tourner un rectangle autour de l'un de ses côtés.



F. Cône de révolution

■ DÉFINITION :

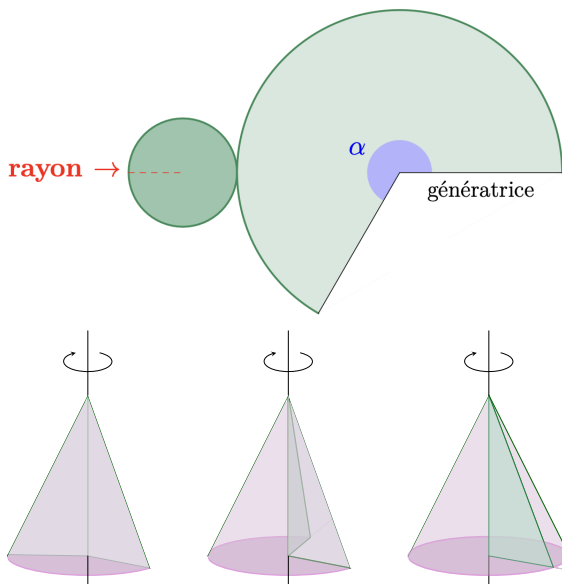
Un cône de révolution est un solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit.

■ DÉFINITION :

La **génératrice** d'un cône de révolution est un segment qui relie le sommet du cône à un point du cercle de base.

C'est l'**hypoténuse** du triangle rectangle que l'on fait tourner autour de l'axe.

Pour information : Voilà le patron d'un cône de révolution dont la base est un disque de diamètre ??? cm et la longueur de la génératrice est 3 cm. Pour tracer un tel patron, la difficulté est de trouver la mesure de l'angle α ...



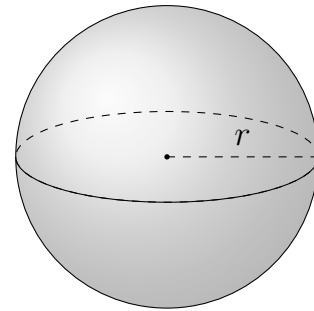
G. Sphère et boule

■ DÉFINITION :

Une **sphère** est l'ensemble des points qui sont à distance donnée d'un point donné, appelé son **centre**.

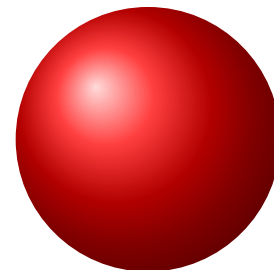
■ DÉFINITION :

On appelle **rayon de la sphère** la distance à laquelle les points se trouvent du centre.



■ DÉFINITION :

Une **boule** est l'ensemble des points qui sont à l'intérieur d'une sphère, c'est-à-dire à distance du centre inférieure ou égale au rayon.



Remarque : Une boule est une sphère pleine.

■ PROPRIÉTÉ :

Il n'existe pas de patron de sphère.

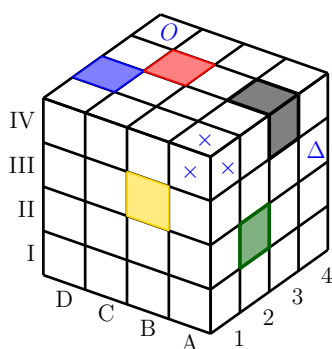
Pour les Grecs, l'univers était fini et représenté par une sphère. Une fois ce modèle déconstruit, de nouveaux horizons mathématiques se sont ouverts, et notamment les **géométries non-euclidiennes**. Pour les curieux, la vidéo suivante présente le concept en 9 minutes 20 secondes :



3. Repérage dans l'espace

a. Première modélisation

Pendant que le lycée est en travaux, on va faire déménager les élèves dans un lycée construit grâce à des cubes, qui vont représenter les salles de classes, comme dans la représentation suivante.



On cherche à repérer les salles du lycée pour que les élèves ne se perdent pas. Comment faire ?

■ **MÉTHODE :** On propose de repérer chaque salle grâce à trois informations, dans cet ordre : une lettre pour la rangée, un nombre pour la ligne, et un nombre écrit en chiffres romains pour la hauteur.

Exemple :

De cette façon, on peut dire que la salle noire est repérée par $(A, 3, IV)$.

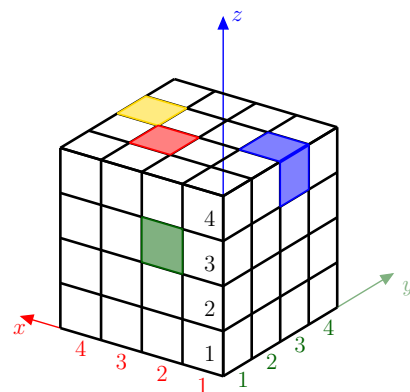
— Repérer, de la même façon, les salles...

- verte : $(A, 2, II)$
- rouge : $(C, 3, IV)$
- jaune : $(B, 1, III)$
- bleue : $(D, 2, IV)$

— Mettre une croix sur le cube repéré par $(A, 1, IV)$, un cercle sur celui repéré par $(D, 4, IV)$ et un triangle sur celui repéré par $(A, 4, III)$.

b. Deuxième modélisation

On préférera finalement repérer les salles avec seulement des nombres, dont l'ordre permettra de déterminer s'ils désignent la rangée, la ligne, ou la hauteur.



Exemple :

Ainsi, dans la représentation ci-dessus, le cube rouge est repéré par $(3, 2, 4)$.

— Repérer, de la même façon, les salles...

- vert : $(2, 1, 3)$
- rouge : $(3, 2, 4)$
- jaune : $(4, 3, 4)$
- bleu : $(1, 3, 4)$

— Quels sont les nombres possibles qui permettent de parler de la salle du lycée située au dernier étage, au fond à droite ? $(4, 4, 4)$

c. Notion de repère de l'espace

Pour repérer un point dans l'espace, il faut munir l'espace d'un **repère**.

Exemple :

La rangée, que nous avons définie précédemment, s'appelle l'**abscisse** du point.

La ligne, que nous avons définie précédemment, s'appelle l'**ordonnée** du point.

La hauteur, que nous avons définie précédemment, s'appelle la **cote** du point.

■ DÉFINITION :

On appelle **coordonnées** du point le **triplet** constitué des trois nombres précédents. On présente les résultats sous la forme

(abscisse ; ordonnée ; cote) .

Ces notions sont définies dans un **repère de l'espace**, c'est-à-dire que l'on a tracé trois droites qui se coupent en un point, et que l'on a posé des nombres repères dessus (des **graduations**). Ici, le repère est caractérisé par les droites (Ox) , (Oy) et (Oz) , où O est le point d'intersection des trois droites.

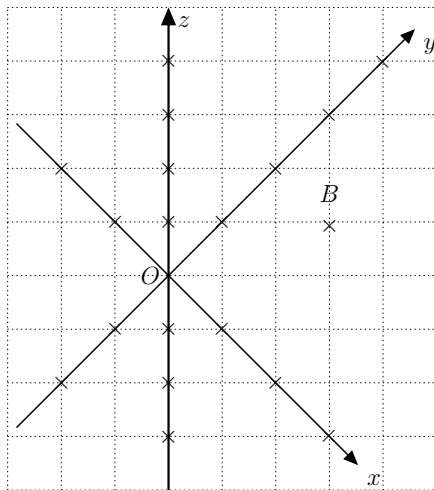
■ DÉFINITION :

Dans un repère de l'espace, le point à l'intersection des trois droites s'appelle l'**origine**, souvent noté O .

Ses coordonnées sont $(0 ; 0 ; 0)$.

Exemple :

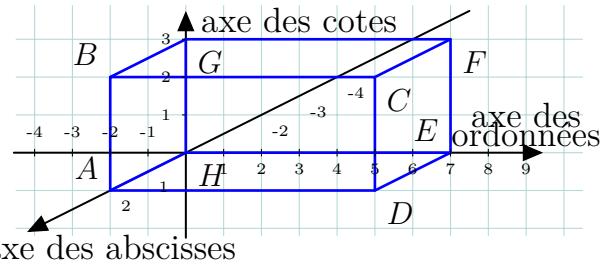
On considère le repère suivant :



Dans ce repère, les coordonnées du point B sont $(2 ; 1 ; 2)$.

Exemple :

— Préciser l'origine du repère sur la figure ci-dessous.



L'origine du repère est à l'intersection des axes, donc l'origine du repère est le point H .

— Donner les coordonnées des sommets de ce pavé droit.

- $A (2 ; 0 ; 0)$
- $B (2 ; 0 ; 3)$
- $C (2 ; 7 ; 3)$
- $D (2 ; 7 ; 0)$
- $E (0 ; 7 ; 0)$
- $F (0 ; 7 ; 3)$
- $G (0 ; 0 ; 3)$
- $H (0 ; 0 ; 0)$

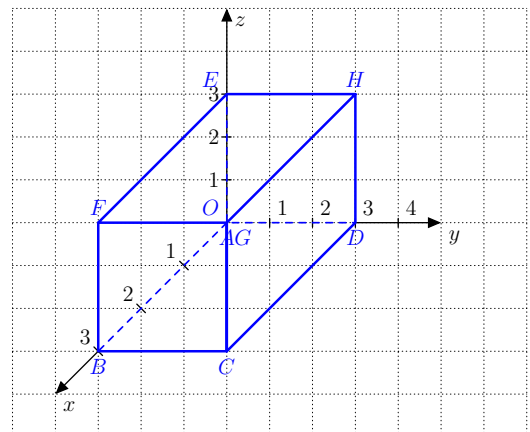
— Déterminer les coordonnées de

- I , milieu de $[AB]$: $I (2 ; 0 ; 1,5)$
- J , milieu de $[DE]$: $J (1 ; 7 ; 0)$
- K , milieu de $[BC]$: $K (2 ; 3,5 ; 3)$

Exemple :

Dans le quadrillage suivant, tracer un repère et placer les points suivants :

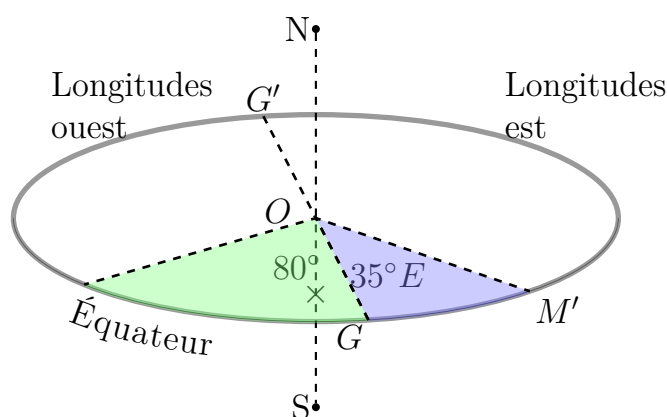
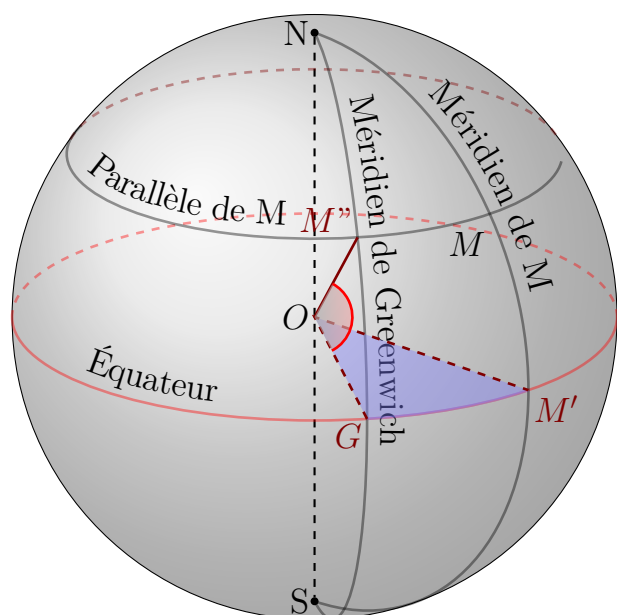
- $A (0 ; 0 ; 0)$ $E (0 ; 0 ; 3)$ $B (3 ; 0 ; 0)$ $F (3 ; 0 ; 3)$
 $D (0 ; 3 ; 0)$ $H (0 ; 3 ; 3)$ $C (3 ; 3 ; 0)$ $G (3 ; 3 ; 3)$



Quelle est la nature du solide associé ? C'est un cube.

d. Cas particulier : repérage sur la Terre

On assimile ici la Terre à une boule de rayon 6370 km. En réalité, on sait depuis le XVII^e siècle qu'elle possède une forme ellipsoïdale qui aplatie aux pôles : le rayon OG est plus grand que le rayon ON de 43 km.



■ DÉFINITION :

Les **méridiens** terrestres sont les demi-grands cercles de diamètre $[NS]$

■ DÉFINITION :

L'**Équateur** est la section de la sphère terrestre par le plan qui passe par le centre de la Terre et qui est perpendiculaire à l'axe des pôles.

■ DÉFINITION :

Les **parallèles** sont les sections de la sphère terrestre par les plans parallèles au plan de l'Équateur (perpendiculaire à l'axe des pôles).

■ PROPRIÉTÉ :

Par tout point de la sphère terrestre, différent des pôles (pôle nord : N , pôle sud : S), il passe un seul méridien et un seul parallèle.

■ DÉFINITION :

Un méridien est repéré par rapport au méridien de Greenwich² par l'angle $\widehat{GOM'}$ qu'on appelle sa **longitude**. Les longitudes sont données de 0° à 180° , Est ou Ouest.

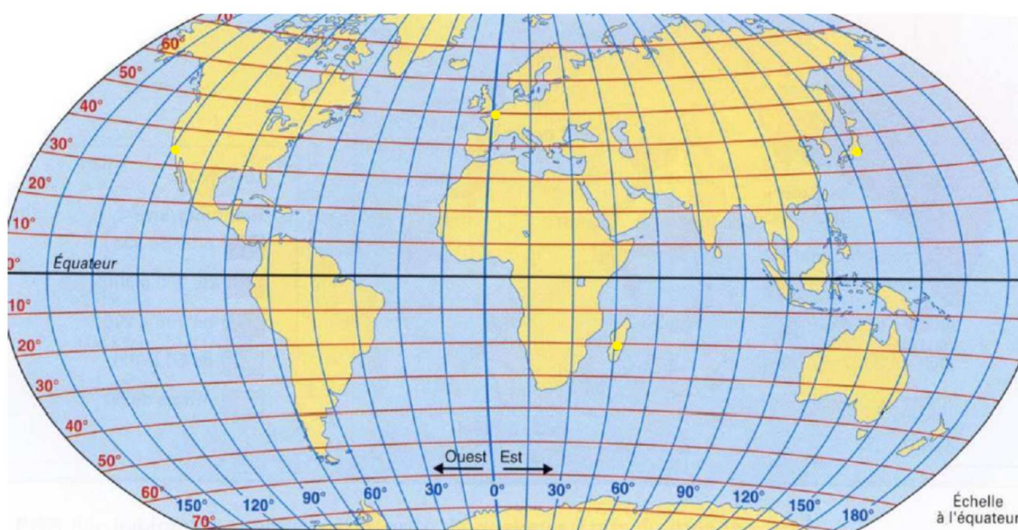
■ DÉFINITION :

Un parallèle est repéré par rapport à l'Équateur par l'angle $\widehat{GOM''}$, égal à $\widehat{M'OM}$, qu'on appelle sa **latitude**. Les latitudes sont entre 0° à 90° , Nord ou Sud.

Exemple : (Brevet 2021)

Dans quel pays est-on si on est localisé à $(20^\circ \text{ Sud} ; 45^\circ \text{ Est})$?

On est à Madagascar.

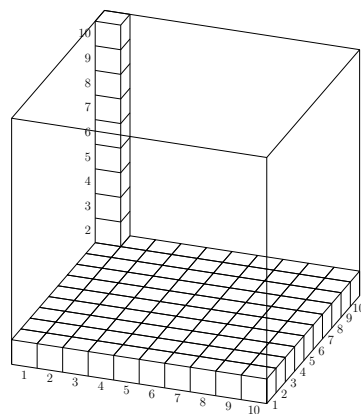


2. Greenwich est un quartier de Londres. En 1884, 25 pays se réunirent aux États-Unis pour voter en faveur d'une référence commune de longitude 0, notamment pour faciliter le commerce maritime. Greenwich l'emporta avec 22 votes contre un (San Domingo) et avec deux abstentions (le Brésil et la France).

5. Volume d'un solide



Pour une figure plane, nous avons l'habitude de calculer l'aire de la figure, c'est-à-dire le nombre de petits carrés (le nombre d'**unités d'aires**) qui permettent de remplir la surface, comme une mosaïque. Cherchons une analogie en dimension 3, en calculant le volume d'un solide, c'est-à-dire le nombre de petits cubes qui permettent de remplir l'espace délimité dans le solide.



A. Expression du volume d'un solide

■ DÉFINITION : Unités de mesure de volume

L'unité de volume usuelle est le **mètre cube** (noté m^3) : c'est la mesure du volume d'un cube de longueur d'arête 1 m.

■ DÉFINITION : Volume d'un solide

Le **volume d'un solide**, exprimé en cm^3 , est le nombre de cubes de $1 cm^3$ nécessaires pour remplir entièrement l'espace délimité dans le solide.

■ DÉFINITION : Unité de contenance

L'unité pour exprimer la contenance d'un objet de l'espace est le **litre**, noté **L**.

■ PROPRIÉTÉ : Changement d'unités de volume

Nous pouvons exprimer les volumes de solides en litres grâce à la règle de conversion suivante : $1 L = 1 dm^3$



■ RAPPEL : Conversion de volume

Le litre est une unité « simple », il y a donc un seul chiffre pour chaque colonne. Le tableau de conversion associé est le suivant :

kL	hL	daL	L	dL	cL	mL

Exemple :

Convertir : $3,415 hL = 341,5 L$.



Attention

Le mètre cube est une unité de dimension 3, il y a donc trois chiffres pour chaque colonne. Le tableau de conversion associé est le suivant, avec trois chiffres par colonne (on y accole le tableau précédent pour comparer) :

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
			hL	daL	L	dL	cL	mL			

Exemple :

Convertir, en s'aidant du tableau précédent :

- $2,3 m^3 = 2\,300 dm^3$.
- $0,145 dm^3 = 145 cm^3$.
- $785 cm^3 = 0,785 dm^3$.
- $91 mm^3 = 0,000091 dm^3$.
- $3,5 dL = 350 cm^3$.
- $12\,540 cL = 1\,254 dm^3$.
- $3,435 m^3 = 3\,435 L$.
- $4,21 dm^3 = 4\,210 mL$.
- $0,01273 L = 12,73 cm^3$.

B. Calcul du volume d'un solide

Pour calculer le volume des solides que l'on a présentés auparavant, il faut distinguer les solides droits, pointus et ronds (cette dernière catégorie étant constituée de la boule)

Solides droits	Solides pointus	Solide rond (boule)
Formule : $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times \text{hauteur}$	Formule : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{base}} \times \text{hauteur}$	Formule : $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times (\text{rayon})^3$



Exemple :

- Cube de longueur d'arête c :

- Solide **droit** .
- La base est **un carré** .
- L'aire de la base est $c \times c = c^2$.
- La hauteur mesure c .

Donc le volume est cube de longueur d'arête c est

$$\mathcal{V} = c^2 \times c = c^3 .$$

- Parallélépipède de longueur L , largeur ℓ et hauteur h :

- Solide **droit** .
- La base est **un rectangle** .
- L'aire de la base est $L \times \ell$.
- La hauteur mesure h .

Donc le volume d'un parallélépipède de longueur L , largeur ℓ et hauteur h :

$$\mathcal{V} = L \times \ell \times h .$$

- Pyramide à base carrée de côté de longueur c et de hauteur h :

- Solide **pointu** .
- La base est **un carré** .
- L'aire de la base est $c \times c = c^2$.
- La hauteur mesure h .

Donc le volume d'une pyramide à base carrée de côté c et de hauteur h est

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times c^2 \times h .$$



- Cylindre de révolution de hauteur h et de rayon du cercle de base R :

- Solide **droit** .
- La base est **un cercle** .
- L'aire de la base est πR^2 .
- La hauteur mesure h .

Donc le volume d'un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon du cercle de base R est

$$\mathcal{V} = \pi R^2 \times h .$$

- Cône de révolution de hauteur h et de rayon du cercle de base R :

- Solide **pointu** .
- La base est **un cercle** .
- L'aire de la base est πR^2 .
- La hauteur mesure h .

Donc le volume d'un cône de révolution de hauteur h et de rayon du cercle de base R est

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h .$$

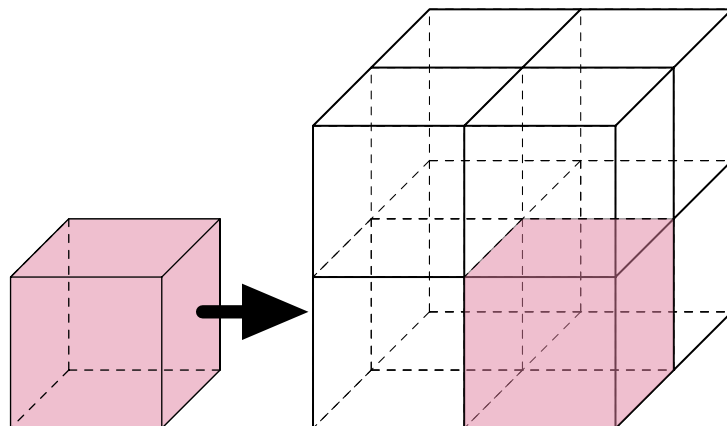
C. Agrandissement et réduction

Exemple :

On considère un cube K d'arête a . On double ses dimensions pour former un cube K' comme dans la représentation ci-contre.

Compléter le tableau suivant :

Cube	K	K'
Arête	a	$2a$
Aire	$6a^2$	$24a^2$
Volume	a^3	$8a^3$



Ainsi :

$$\bullet \mathcal{A}_{K'} = 4\mathcal{A}_K = 2^2\mathcal{A}_K$$

$$\bullet \mathcal{V}_{K'} = 8\mathcal{V}_K = 2^3\mathcal{V}_K$$

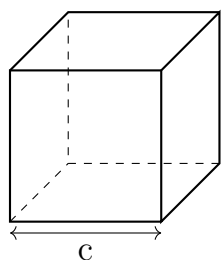
■ PROPRIÉTÉ :

Soient (S) un solide d'aire $\mathcal{A}$ et de volume $\mathcal{V}$ et (S') un solide d'aire $\mathcal{A}'$ et de volume $\mathcal{V}'$. Si (S') est un agrandissement ou une réduction à l'échelle k du solide (S) , alors :

$$\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{V}' = k^3\mathcal{V}$$

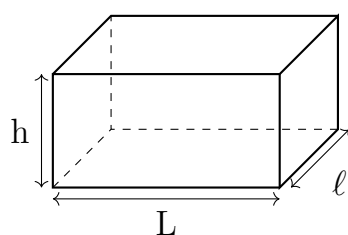
D. Résumé des formules

Le cube



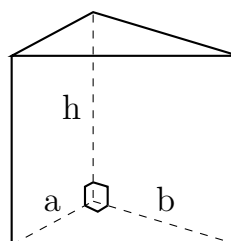
$$\text{Volume} = c^3$$

Le pavé droit
(parallélépipède rectangle)



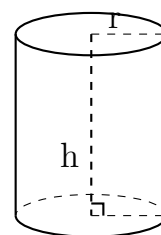
$$\text{Volume} = L \times l \times h$$

Le prisme droit



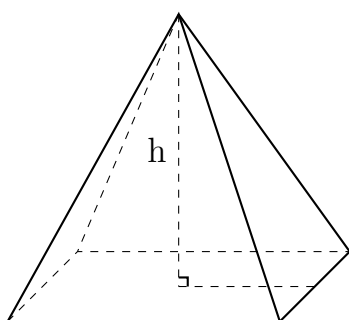
$$\text{Volume} = \frac{a \times b}{2} \times h$$

Le cylindre



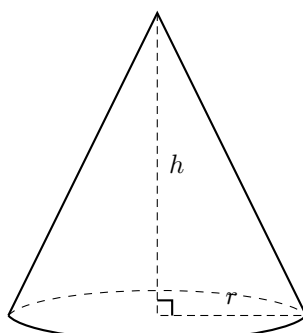
$$\text{Volume} = \pi r^2 h$$

La pyramide



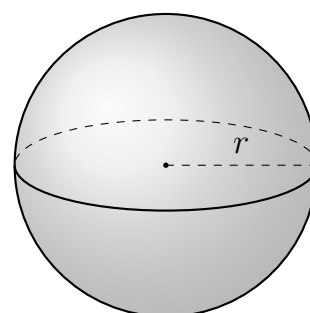
$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$$

Le cône



$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

La sphère - La boule



$$\text{Volume} = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ ou } \underbrace{0}_{\text{boule}} \text{ sphère}$$