Arithmétique

1. Multiples et diviseurs

Existe-il un nombre entier k tel que $19\,006 = 43k$?

. ----------

On dit alors que 43 est un **diviseur** de 19 006 ou encore que 19 006 est un **multiple** de 43.

■ DÉFINITION : multiple et diviseur

Soient a et b deux nombres entiers. On dit que :

- b **divise** a
- b **est un diviseur** de a
- a **est divisible** par b
- a **est un multiple** de b

s'il existe un nombre entier k tel que $a = k \times b$.
Dans ce cas, on note $b|a$.

Exemple :

- 5 est-il un multiple de 2 ?
- 3 est-il un multiple de 0 ?
- Tout entier est un diviseur de 0. Vrai ou faux ?
- La somme de deux multiples quelconques de 13 est un multiple de 13. Vrai ou faux ? . --------

  . ----------

  . ----------

  . ----------
- Dresser la liste, que l'on notera D_{15}, des diviseurs **entiers naturels** de 15.

  . ----------

  . ----------

Remarque : Critères de divisibilité

- un nombre est divisible par 2 si et seulement s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8
- un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3
- un nombre est divisible par 5 si et seulement s'il se termine par 0 ou 5
- un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9
- un nombre est divisible par 10 si et seulement s'il se termine par 0

Démonstration. On va montrer le critère de divisibilité par 9 pour un entier n s'écrivant avec quatre chiffres en écriture décimale, la démonstration pour un entier quelconque étant analogue.

On suppose donc que $n = \overline{abcd}$ où $\overline{abcd}$ est son écriture décimale (on note $\overline{abcd}$ à la place de $abcd$, écriture réservée au produit $a \times b \times c \times d$).
Montrer que $n = 9\,(111a + 11b + c) + a + b + c + d$

En déduire que : si $9|n$, alors $9|\,(a + b + c + d)$ et que si $9|\,(a + b + c + d)$, alors $9|n$.

Autrement dit, $9|n \iff 9|\,(a + b + c + d)$

□

Remarque : Un nombre pair est un nombre qui est divisible par 2. Donc tout entier pair n s'écrit sous la forme :

$n =$ ....., avec .....

Un nombre impair n est un nombre qui s'écrit sous la forme

$n =$ ....., avec .....

DÉFINITION : Division euclidienne[1]

Soient a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$. On dit que l'entier q et l'entier r sont respectivement le **quotient et le reste dans la division euclidienne** lorsque $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$

Remarque : On démontre que si a et b sont deux entiers naturels avec $b \neq 0$ alors il **existe** toujours deux entiers naturels q et r **uniques** tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

Exemple :

- Quel est le quotient et quel est le reste dans la division euclidienne de 53 par 7 ?

- $61 = 9 \times 6 + 7$. Quel est alors le quotient et le reste dans la division euclidienne de 61 par 9 ?

  Quel est alors le quotient et le reste dans la division euclidienne de 61 par 6 ?

- L'égalité $53 = 6 \times 7 + 11$ représente-t-elle une division euclidienne ?

Remarque : Si a et b sont deux entiers avec $b \neq 0$.

$b|a$ si et seulement si le reste dans la division euclidienne de a par b est 0.

Étant donnés deux entiers positifs a et b, on s'intéresse maintenant aux diviseurs communs à ces deux entiers.

- Quels sont les diviseurs communs positifs aux entiers 3 et 6 ?
- Même question avec 3 et 5.
- Même question avec 12 et 18.
- Deux entiers ont toujours au moins un diviseur commun positif. Lequel ?

On s'intéresse maintenant aux multiples strictement positifs **communs** à ces deux entiers.

- Les premiers multiples strictement positifs de 5 sont

  . ----------

  et ceux de 7 sont

  . ----------

  Donc 35, qui vaut 7×5, est un multiple strictement positif commun à 5 et 7 et c'est le plus petit. En donner un autre. . ----------

  . ----------

  . ----------

- On considère les entiers 6 et 4. L'entier $24 = 6 \times 4$ est un multiple strictement positif commun à 6 et 4. Est-ce le plus petit ? . ----------

  . ----------

  . ----------

- Deux entiers ont toujours au moins un multiple commun positif. Lequel ? . ----------

  . ----------

  . ----------

DÉFINITION-PROPRIÉTÉ :

Soient a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$.

- Parmi les diviseurs communs à a et b, il y en a un plus grand que tous les autres : on l'appelle le **plus grand commun diviseur** à a et b et on le note PGCD $(a\ ;\ b)$
- Parmi les multiples communs à a et b strictement positifs, il y en a un plus petit que tous les autres : on l'appelle le **plus petit commun multiple** à a et b et on le note PPCM $(a\ ;\ b)$.

DÉFINITION :

Si PGCD $(a\ ;\ b) = 1$, alors on dit que les entiers a et b sont **premiers entre eux**.

Exemple :

- PGCD $(12\ ;\ 18) =$ ----------

  . ----------

- PGCD $(5\ ;\ 7) =$ ----------

  . ----------

- PGCD $(0\ ;\ 18) =$ ----------

  . ----------

- PPCM $(9\ ;\ 4) =$ ----------

  . ----------

- PPCM $(12\ ;\ 18) =$ ----------

  . ----------

1. Euclide est un mathématicien de la Grèce antique, auteur d'éléments de mathématiques, qui constituent l'un des textes fondateurs de cette discipline en Occident. Aucune information fiable n'est parvenue sur la vie et la mort d'Euclide ; il est possible qu'il ait vécu vers 300 avant notre ère.

2.. Nombres premiers

■ DÉFINITION :

Un nombre entier naturel est dit **premier** s'il admet ..... diviseurs positifs : ..... .

Exemple :

- 3 est un nombre premier. En effet, ...
- 1 n'est pas un nombre premier. En effet, ...
- 2 est le seul nombre premier pair. En effet, .. .
- Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :

  2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ;
  31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ;
  71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97

■ PROPRIÉTÉ :

Tout entier $a \geqslant 2$ admet au moins un diviseur premier.

Démonstration. . .....

■ PROPRIÉTÉ :

Tout entier $a > 2$ et non premier admet au moins un diviseur premier p tel que : $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{a}$

Démonstration. . .....

Exemple :

Les nombres 787 et 1517 sont-ils premiers ?

.....

■ THÉORÈME (Euclide)

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Activité autour de l'histoire de mathématiques. □

Remarque : Le plus grand nombre premier connu à l'heure actuelle est $n = 2^{136\,279\,841} - 1$. Le nombre n a une écriture décimale comportant 82 869 127 chiffres. Il a été découvert le 12 octobre 2024.

■ THÉORÈME (Théorème fondamental de l'arithmétique)

Tout nombre entier $a \geqslant 2$ se décompose sous la forme $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ où p_1, p_2, ..., p_n sont des nombres premiers distincts et α_1, α_2, ..., α_n sont des entiers naturels non nuls. **Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.**

Exemple :

La décomposition en facteurs premiers de 48 est

. ----------

La décomposition en facteurs premiers de 1517 est

. ----------

Exemple : En pratique...

pour décomposer un entier en produit de facteurs premiers, on teste s'il est divisible par les premiers nombres premiers, que l'on teste par ordre croissant. Par exemple :

104 544	2
	2

D'où 104 544 = ----------

Exemple :

Décomposer en facteurs premiers les entiers $a = 7\,227\,792$ et $b = 16\,050\,771$.

7 227 792	2

16 050 771

Donc $a =$. ---------- et $b =$. ----------

3. Applications

A. Plus Grand Commun Diviseur et Plus Petit Commun Multiple

■ THÉORÈME

Soient a et b deux entiers supérieurs ou égaux à 2 :

- Le **plus grand commun diviseur de a et b**, noté PGCD $(a; b)$ est le nombre qui a pour décomposition le produit des facteurs premiers apparaissant à la fois dans la décomposition de a et de b, munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et de b.
- Le **plus petit commun multiple de a et b**, noté PPCM $(a; b)$ est le nombre qui a pour décomposition le produit des facteurs premiers apparaissant au moins une fois dans la décomposition de a et celle de b, munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et de b.

Exemple :

Soient $a = 7\,227\,792$. ----------
et $b = 16\,050\,771$

- Les nombres premiers apparaissant à la fois dans la décomposition de a et de b sont ..... d'où PGCD $(a\ ;\ b)$ = ...
- Les nombres premiers apparaissant au moins une fois dans la décomposition de a et dans celle de b sont ..... d'où :
  PPCM $(a; b)$ = ...
  = ...

B. Mettre des fractions sous forme irréductible

■ PROPRIÉTÉ :

Si a et b sont deux nombres entiers positifs non nuls, la forme irréductible de la fraction $\frac{a}{b}$ est

$$\frac{a \ / \ \text{PGCD}\,(a; b)}{b \ / \ \text{PGCD}\,(a; b)}$$

Exemple :

Déterminer la forme irréductible de la fraction $\frac{403}{217}$.

. ----------
. ----------
. ----------
. ----------