

Transformations affines

1. Translation

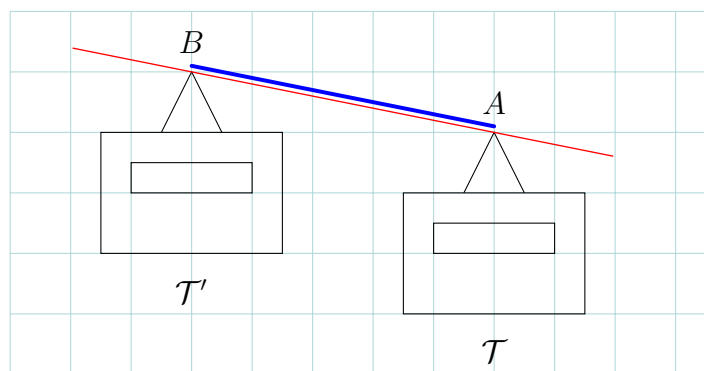
A. Définition et propriétés

■ DÉFINITION :

Soient A et B deux points du plan. On appelle **translation qui transforme A en B** la transformation géométrique définie grâce à

- la **direction** de la droite (AB) (ou d'une parallèle)
- le **sens** de A vers B .
- la **longueur** égale à AB .

On dit que la figure $\mathcal{T}'$ est l'image de la figure $\mathcal{T}$ par la translation qui transforme A en B (on dit aussi « la translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ »).

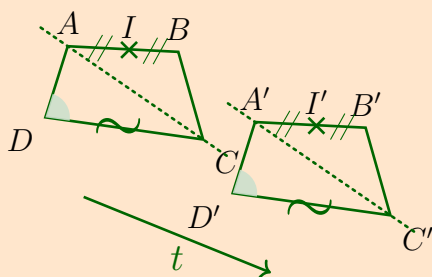


Remarque : Les deux figures sont superposables.

■ PROPRIÉTÉ : Conservation (admise)

Une translation conserve :

- les longueurs
- l'alignement des points
- les angles
- les aires

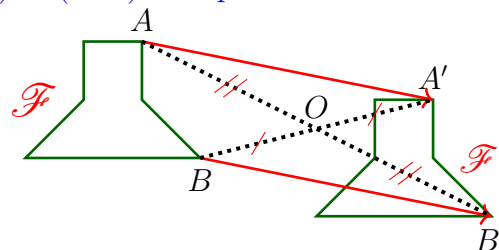


■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Si une translation transforme un point A en un point A' et un point B en un point B' , alors le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme.

Ci-dessous, la figure $\mathcal{F}'$ est l'image de la figure $\mathcal{F}$ par la translation qui transforme A en A' . D'après la propriété précédente, on sait que :

- $AA' = BB'$
- (AA') et (BB') sont parallèles.



Donc le quadrilatère non croisé $ABB'A'$ est un **parallélogramme**

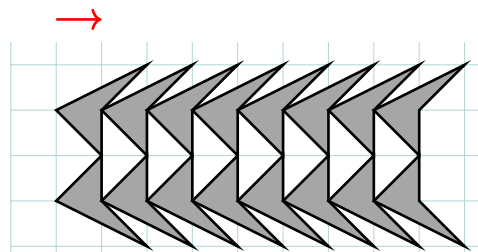
B. Frise et pavage

■ DÉFINITION :

Une **frise** est une figure géométrique constituée d'un motif de base reproduit dans une seule direction par des translations et / ou des symétries.

Exemple :

- Entourer le motif de base.
- Préciser les transformations nécessaires pour obtenir cette frise.
- Indiquer le vecteur de translation.

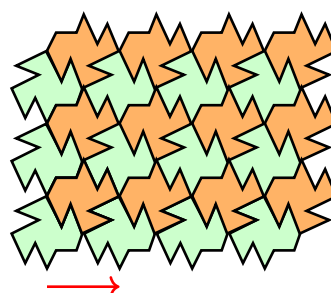


■ DÉFINITION :

Un **pavage** du plan est un recouvrement du plan sans espace ni superposition à partir d'un motif de base.

Exemple :

- Entourer un motif de base.
- Préciser les transformations nécessaires pour obtenir ce pavage.
- Indiquer les vecteurs de translation.

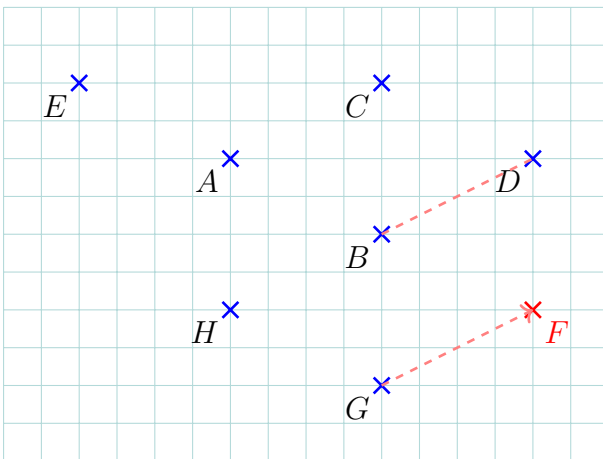


C. Constructions

a. sur quadrillage

Exemple :

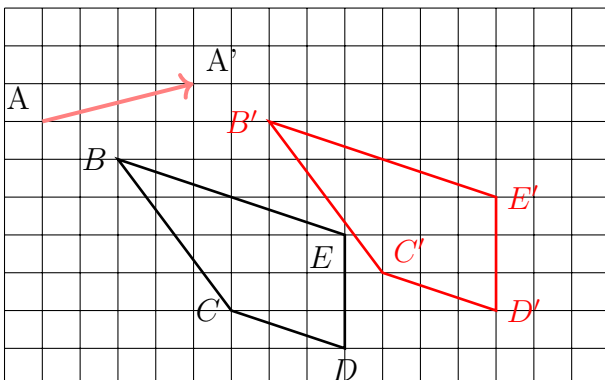
- L'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$ est A
- L'image du point C par la translation qui transforme D en G est H
- L'image du point G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ est H .
- L'image du point H par la translation qui transforme A en C est B .
- Placer le point F image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$



- Quelle est la nature du quadrilatère $BDFG$? Le quadrilatère $BDFG$ est un parallélogramme.

Exemple :

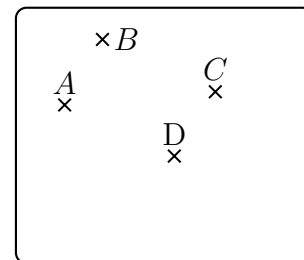
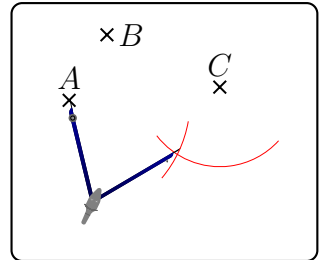
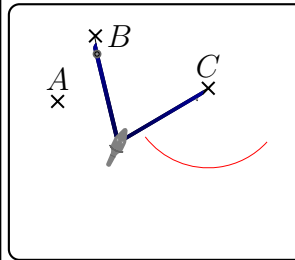
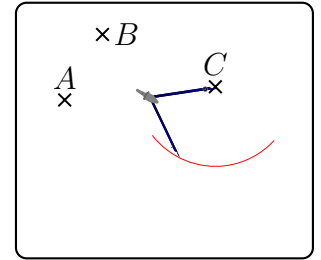
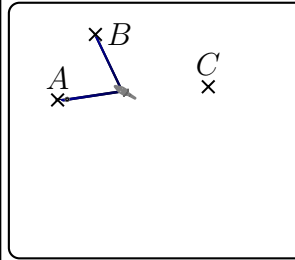
On considère la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Construire l'image du quadrilatère $BCDE$ par cette translation.



b. sur feuille blanche

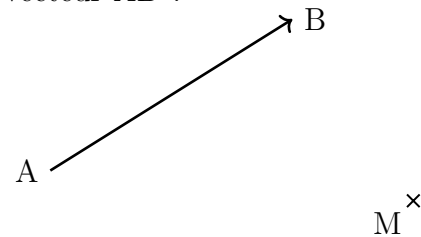
MÉTHODE :

Pour construire l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$:



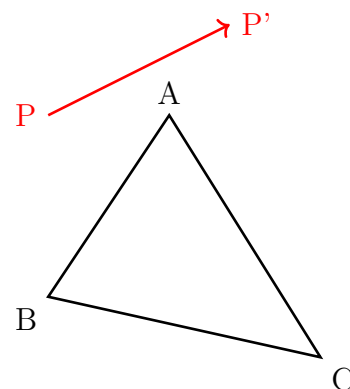
Exemple :

Construire l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$:



Exemple :

Construire l'image du triangle ABC par la translation qui transforme P en P' :



2. Rotations

A. Définition et propriétés

■ DÉFINITION :

Une rotation de centre O permet de faire tourner une figure autour du point O sans la déformer. Elle est définie par :

- un centre
- un angle
- un sens

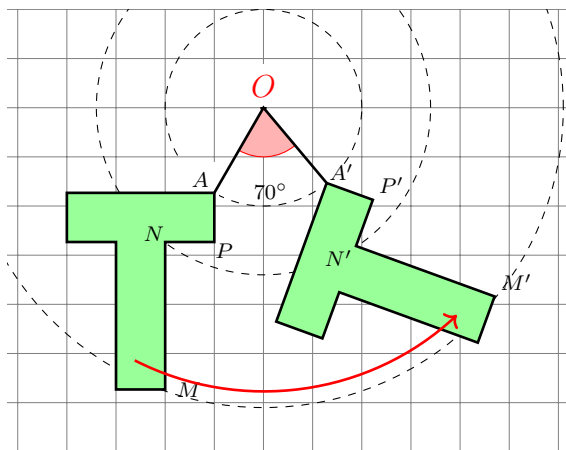
■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Une rotation conserve :

- L'alignement
- Les longueurs
- Les aires
- Les mesures d'angles

Exemple :

La figure $\mathcal{F}'$ est l'image de la figure $\mathcal{F}$ par la rotation de centre O et d'angle 70 degrés dans le sens indiqué par la flèche.



Cette rotation transforme A en A' , M en M' , N en N' et P en P' .

D'après la propriété précédente :

- $OA = OA'$ et $\widehat{AOA'} = 70^\circ$
- $OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = 70^\circ$
- $ON = ON'$ et $\widehat{NON'} = 70^\circ$
- $OP = OP'$ et $\widehat{POP'} = 70^\circ$

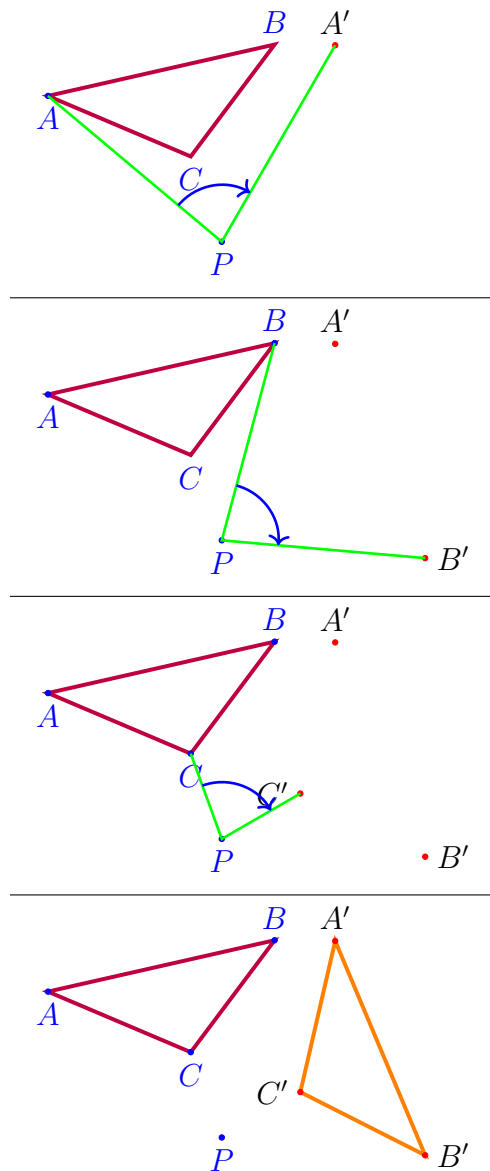
Les figures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ ont même aire .

L'angle droit $\widehat{MNP}$ est transformé en

l'angle droit $\widehat{M'N'P'}$

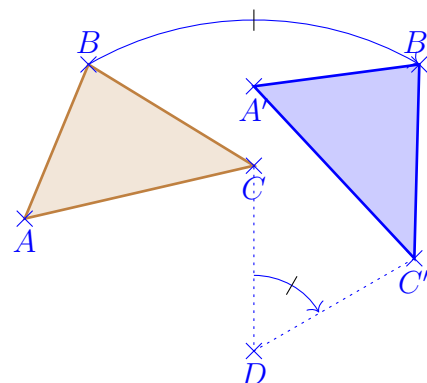
B. Construction

■ MÉTHODE :



Exemple :

Construire l'image de la figure suivante par la rotation de centre D et d'angle 60 degrés dans le sens horaire.



3. Homothétie

A. Définitions

■ **DÉFINITION :** Image par une homothétie

Soit O un point et k un nombre non nul. Par l'**homothétie de centre O et de rapport k**

- L'image de O est O .
- Si $M \neq O$, alors l'image du point M est le point M' de la droite (OM) tel que :

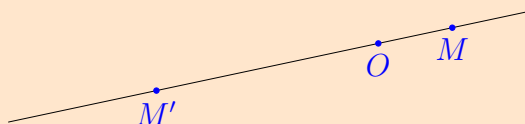
— Si $k > 0$, alors

$$M' \in [OM) \text{ et } OM' = kOM$$



— Si $k < 0$, alors

$$M' \notin [OM) \text{ et } OM' = -kOM$$



Notation : Soit O un point et k un nombre non nul. L'homothétie de centre O et de rapport k est noté $h_{(O; k)}$.

■ **PROPRIÉTÉ :**

Par une homothétie, un point, son image et le centre de cette homothétie sont alignés.

■ **DÉFINITION :**

L'homothétie $h_{(O; 1)}$ s'appelle l'**identité** : elle transforme chaque point en lui-même.

■ **DÉFINITION :**

L'homothétie $h_{(O; -1)}$ est aussi la **symétrie centrale de centre O** .

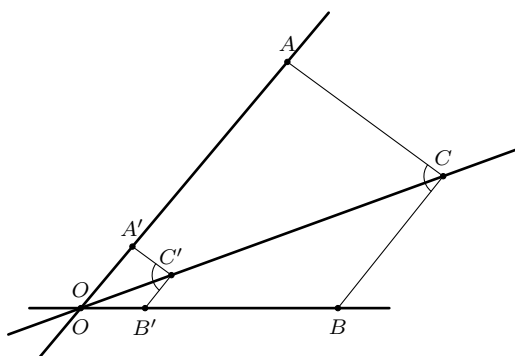
2. Propriétés

■ **PROPRIÉTÉ :**

Par une homothétie, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.

■ **PROPRIÉTÉ :**

Une homothétie conserve les mesures d'angles.



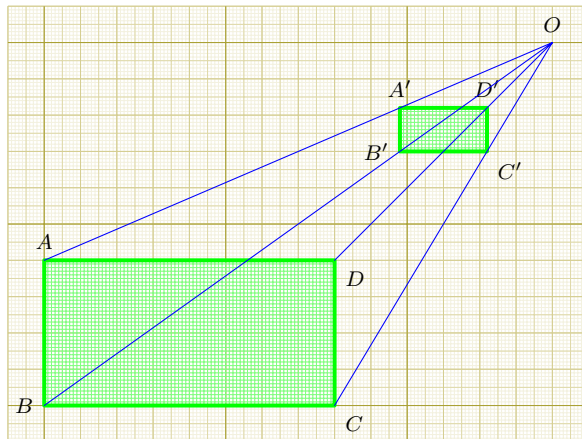
■ **PROPRIÉTÉ :**

Par une homothétie de rapport $k > 0$, les longueurs sont multipliées par k .

Par une homothétie de rapport $k < 0$, les longueurs sont multipliées par $-k$.

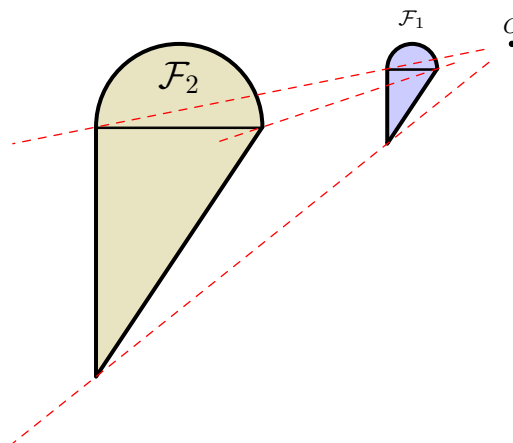
■ **DÉFINITION :**

Si $0 < |k| < 1$, alors l'image d'une figure par $h_{(O; k)}$ est une **réduction** de cette figure.



■ **DÉFINITION :**

Si $|k| > 1$, alors l'image d'une figure par $h_{(O; k)}$ est un **agrandissement** de cette figure.



B. Construction

Exemple :

Construire l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport -2 .

