

Probabilités

1. Vocabulaire

■ DÉFINITION :

On appelle **expérience aléatoire** une expérience, un phénomène, dans lequel intervient le hasard et dont le résultat est imprévisible *a priori*.

Exemple :

- On lance une pièce sur une table jusqu'à ce qu'elle s'immobilise et on note si la face visible de la pièce est Pile ou Face.
- On lance un dé cubique à face numérotées de 1 à 6 sur une table jusqu'à ce qu'il s'immobilise. On note le numéro sur la face supérieure du cube.
- On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes et on note la carte tirée.

■ DÉFINITION :

On appelle **issue** ou **événement élémentaire** ou encore **éventualité** un résultat possible d'une expérience aléatoire.

Exemple :

- Quand on joue à « Pile ou Face », les issues sont : **Pile ou Face** . Il y en a **2** .
- Quand on lance un dé non truqué à 6 faces, il y a **6** éventualités, qui sont **les valeurs des six faces du dé**.
- Quand on choisit une carte dans un jeu de 32 cartes, il y a **32** cas possibles, qui sont **les 32 cartes du jeu**.^a

^a. 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As, en pique, cœur, trèfle et carreau

■ DÉFINITION :

L'ensemble de tous les événements élémentaires relatifs à une même expérience aléatoire s'appelle l'**univers** et se note souvent Ω .

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes, on la note sur un morceau de papier, on remet la carte dans le paquet, on tire une seconde fois une carte au hasard et on note cette carte à droite de la précédente note. ». Décrire Ω . Combien Ω admet-il d'éléments ?

Ω est l'ensemble des couplets de cartes que l'on peut former avec 32 cartes. Il y en a $32 \times 32 = 1024$.

■ DÉFINITION :

On considère une expérience aléatoire et Ω son univers associé. On appelle **événement** toute partie de Ω .

Exemple :

Quand on lance un dé à 6 faces, $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$. On considère la partie $A = \{2 ; 4 ; 6\}$. A est une partie de Ω , donc A est un événement. Cet événement peut aussi s'écrire en français : $A =$ « tirer un nombre pair ».

Décrire comme partie de Ω les événements

$B =$ « tirer un nombre premier »

et $C =$ « tirer un nombre supérieur ou égal à 2 ».

$B = \{2 ; 3 ; 5\}$

$C = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Exemple :

On pioche une carte dans un jeu de 32 cartes. Décrire par une phrase l'événement

$$D = \left\{ \begin{array}{c} \text{A} \\ \spadesuit \end{array} ; \begin{array}{c} \text{A} \\ \heartsuit \end{array} ; \begin{array}{c} \text{A} \\ \clubsuit \end{array} ; \begin{array}{c} \text{A} \\ \diamondsuit \end{array} \right\}$$

$B =$ « Obtenir un As »

■ DÉFINITION :

On considère une expérience aléatoire et Ω son univers associé. Soit A un événement. On appelle **cardinal de A** et on note $\text{card}(A)$ le nombre d'éléments de A .

Exemple :

- Quand on joue à « Pile ou Face »,
 $\text{card}(\Omega) = 2$.
- Quand on lance un dé à 6 faces,
 $\text{card}(\Omega) = 6$.
- Quand on tire une carte dans un jeu de 32 cartes,
 $\text{card}(\Omega) = 32$.

■ DÉFINITION :

Un événement est **impossible** si c'est un événement qui ne se réalise jamais.

■ DÉFINITION :

Un événement est **certain** s'il se réalise toujours, quel que soit le résultat de l'expérience aléatoire.

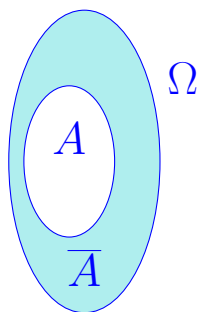
Exemple :

On jette un dé à 6 faces.

- Événement impossible : « Obtenir 10 »
- Événement certain : « Obtenir un nombre compris entre 1 et 6 »

■ DÉFINITION :

On note $\bar{A}$ l'événement **contraire** de A , c'est-à-dire l'événement qui se réalise quand A ne se réalise pas. $\bar{A}$ est l'événement formé des éventualités qui ne sont pas dans A .



Exemple :

On jette un dé à 6 faces. On considère l'événement $A = \{2 ; 4 ; 6\}$. Alors

$$\bar{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$$

Et on a bien $\bar{\bar{A}} = A$ « Tirer un nombre impair »

Exemple :

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Quel est l'événement contraire de l'événement :

$$R = \left\{ \begin{array}{c} \text{7 de carreaux} \\ \text{7 de coeurs} \\ \text{8 de carreaux} \\ \text{8 de coeurs} \end{array} ; \dots ; \begin{array}{c} \text{As de carreaux} \\ \text{As de coeurs} \end{array} \right\}$$

$$\bar{R} = \{ \text{cartes noires} \}.$$

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes, on la note sur un morceau de papier, on remet la carte dans le paquet, on tire une seconde fois une carte au hasard et on note cette carte à droite de la précédente note. ». Quel est l'événement contraire de l'événement $N =$ « tirer deux cartes noires ».

2. Notion de probabilités

Activité : Loi des grands nombres. Si une expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois, la fréquence d'apparition de chaque événement élémentaire **s'approche** d'un nombre particulier p . Ce nombre est appelé la **probabilité de l'éventualité** e , et on note $P(e) = p$.

■ DÉFINITION :

La **probabilité** d'une issue est la « proportion de chance » théorique d'obtenir cette issue lors d'une expérience aléatoire.

Exemple :

- Si on lance une pièce parfaitement équilibrée,

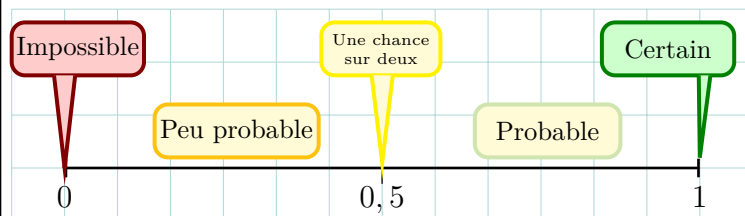
$$P(\text{Obtenir Pile}) = P(\text{Obtenir Face}) = \frac{1}{2}$$

- Si on lance un dé parfaitement équilibré,

$$P(\text{Obtenir } 1) = \dots = P(\text{Obtenir } 6) = \frac{1}{6}$$

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 et on a les interprétations suivantes :



■ DÉFINITION :

Soit N un nombre entier supérieur ou égal à 1. On considère une expérience aléatoire et son univers associé : $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_N\}$.

Si $P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_N)$, alors on dit qu'il y a **équiprobabilité** sur Ω .

Remarque : Dans une expérience aléatoire, on dit que les issues sont **équiprobables** si elles ont la même probabilité, c'est-à-dire la même chance de survenir.

Exemple :

Dans le cas d'un lancer d'une pièce parfaitement équilibrée ou d'un dé parfaitement équilibré, il y a équiprobabilité sur Ω .

Si on lance un dé truqué, il n'y a pas équiprobabilité.

3. Calcul des probabilités

■ PROPRIÉTÉ :

Soit N un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout univers $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_N\}$ et toute probabilité P sur Ω , on a

$$P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_N) = 1$$

Exemple :

On considère le lancer d'un dé à 6 faces parfaitement équilibré. Il y a 6 issues, qui sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Chaque issue a une chance sur six d'être réalisée, c'est-à-dire $\frac{1}{6}$.

On a bien

$$\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 1}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 2}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 3}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 4}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 5}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 6}} = 1$$

■ DÉFINITION :

On considère une expérience aléatoire, Ω son univers associé et P une probabilité sur Ω . Soit A un événement. La **probabilité de l'événement** A , notée $P(A)$, est la somme des probabilités des éventualités qui le composent.

Exemple :

On lance un dé parfaitement équilibré. Puisque le dé est parfaitement équilibré, il y a équiprobabilité sur Ω .

Soit A l'événement : « Obtenir un multiple de 3 ».

$A = \{3; 6\}$. Alors

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 3}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{pour 6}}$$

$$P(A) = \frac{2}{6}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Quelle que soit l'expérience aléatoire, $P(\Omega) = 1$.

■ PROPRIÉTÉ : (rappel)

Soient Ω un univers, P une probabilité sur Ω et A un événement. Alors $0 \leq P(A) \leq 1$.

Remarque : Cette propriété est très pratique pour vérifier ses résultats après un calcul de probabilité !

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Soit A un événement. Alors

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Exemple :

On reprend le lancer d'un dé à 6 faces. On considère l'événement : « Ne pas obtenir un 6 ». Notons-le $\overline{A}$. Alors l'événement A est « Obtenir un 6 », et on a vu que $P(A) = \frac{1}{6}$. Donc

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

4. Cas particulier de l'équiprobabilité

S'il y a équiprobabilité, on dispose de deux propriétés supplémentaires :

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Dans une expérience aléatoire à n issues **équiprobables**, alors la probabilité de chacune des issues est $\frac{1}{n}$.

Exemple :

Dans un lancer de dé non truqué à 6 faces, chaque issue a la même probabilité d'apparaître (puisque le dé est non truqué).

Donc la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{6}$, on retrouve le résultat précédent.

■ PROPRIÉTÉ : (admise) Formule de Laplace¹

Dans une expérience aléatoire où toutes les issues sont **équiprobables**, la probabilité d'un événement A vaut

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Exemple :

On considère une urne avec, à l'intérieur, vingt boules indiscernables au toucher. Ces boules sont numérotées de 1 à 20. Déterminer la probabilité de l'événement A : « Tirer un multiple de 5 ».

Les boules sont indiscernables au toucher, donc nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

Il y a 4 multiples de 5 entre 1 et 20, donc

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20 \, \%.$$

1. Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) est un mathématicien, astronome, physicien et homme politique français.

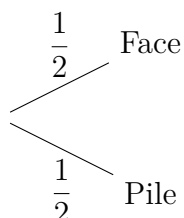
5. Expérience aléatoire à deux épreuves

■ DÉFINITION :

On peut représenter une expérience aléatoire et la probabilité associée à son univers par un **arbre de probabilité** (ou **arbre pondéré**).

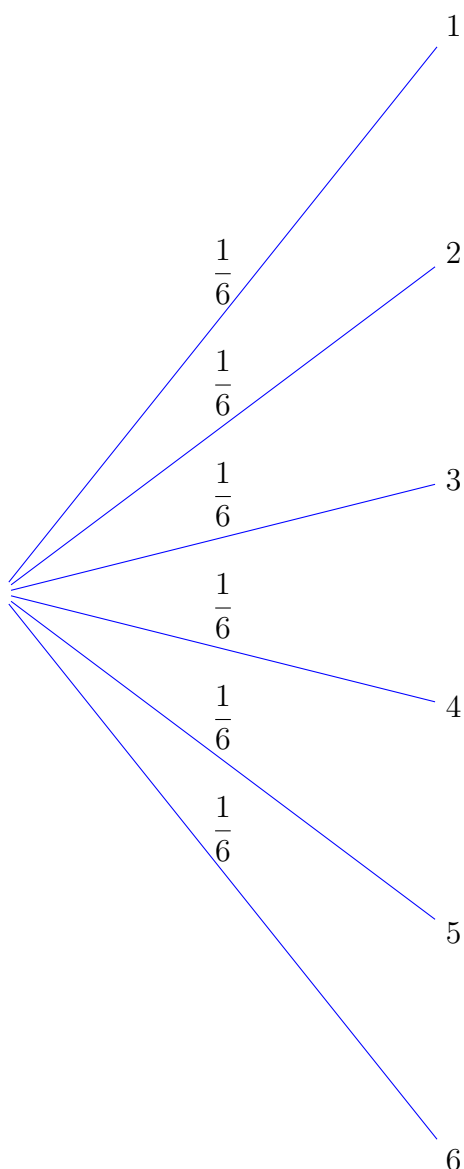
Exemple :

Dans le cas où on lance une pièce parfaitement équilibrée,



Exemple :

Dans le cas où on lance un dé parfaitement équilibré,



On envisage désormais des expériences aléatoires plus sophistiquées, en deux étapes.

Exemple :

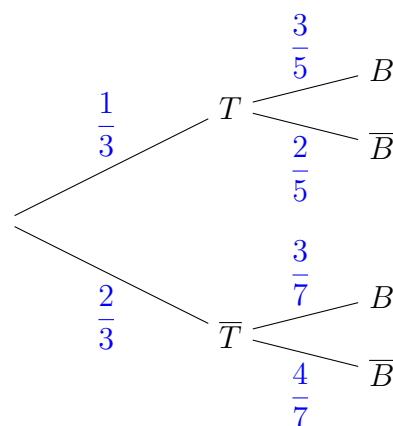
On lance un dé parfait.

- Si l'on obtient un multiple de 3, alors on tire au hasard une boule d'un sac contenant 3 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher.
- Si l'on n'obtient pas un multiple de 3, alors on tire au hasard une boule d'un sac contenant 3 boules blanches et 4 boules noires, indiscernables au toucher.

On veut calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche à l'issue de cette expérience aléatoire à deux épreuves. On considère les événements :

T = « Obtenir un multiple de 3 »

B = « Obtenir une boule blanche ».



En déduire $P(B)$.

La probabilité de l'événement B est de :

- la probabilité de l'événement B sachant que l'on a obtenu un multiple de 3
- et la probabilité de l'événement B sachant que l'on n'a pas obtenu un multiple de 3.

$$\text{Ainsi } P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{7}{35} + \frac{10}{35}$$

$$\text{Donc } P(B) = \frac{17}{35}$$