

Fonctions affines

Les **fonctions affines** sont des cas particuliers de fonctions. Nous allons commencer par étudier un cas particulier de fonctions affines : les **fonctions linéaires**.

1. Les fonctions linéaires

A. Généralités

Exemple :

Un vaisseau tourne autour de la Terre à la vitesse constante de 7 km.s^{-1} . Exprimer la distance $d(t)$ parcourue par le vaisseau et exprimée en kilomètres en fonction de la durée t de sa révolution exprimée en heures.

Pour trouver $d(t)$ en fonction de t , exprimée en secondes, on multiplie t par 7.

Or, $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ secondes}$.

Donc $7 \text{ km.s}^{-1} = 7 \times 3\,600 \text{ km.h}^{-1} = 25\,200 \text{ km.h}^{-1}$.

Donc $d(t) = 25\,200 \times t$

On dit que la fonction d est la **fonction linéaire de coefficient 25 200**.

Exemple :

Dans un magasin, au moment des soldes, le prix de chacun des articles vendus subit un rabais de 40 %. Si x est le prix en euros d'un article quelconque avant les soldes, quel est le nouveau prix $n(x)$ de cet article au moment des soldes ?

Une diminution se traduit par une multiplication par un coefficient multiplicateur égal à $1 - \frac{40}{100} = 0,6$ (voir le chapitre sur la proportionnalité).

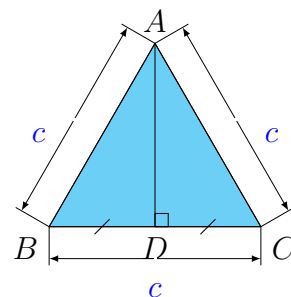
Donc $n(x) = 0,6 \times x$.

On dit que la fonction n est la **fonction linéaire de coefficient 0,6**.

Exemple :

On considère un triangle équilatéral de longueur de côté c cm et on note $h(c)$ sa hauteur exprimée en cm. Exprimer $h(c)$ en fonction de c .

Dans un triangle équilatéral, les hauteurs et médianes sont confondues. Donc, dans le triangle ABD rectangle en D , d'après le théorème de Pythagore, $c^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$,



donc $c^2 = h^2 + \frac{c^2}{4}$, c'est-à-dire $h^2 = \frac{3}{4}c^2$. Or, h est une longueur, donc h est positif, donc $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Ainsi $h(c) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times c$.

On dit que la fonction h est la **fonction linéaire de coefficient $\frac{\sqrt{3}}{2}$** .

Plus généralement

■ DÉFINITION :

On dit qu'une fonction f est **linéaire** s'il existe un nombre a tel que pour tout nombre x , $f(x) = ax$. Autrement dit, si la fonction f est définie par

$$f : x \mapsto ax$$

Le nombre a s'appelle le **coefficient** de la fonction linéaire f .

Remarque : Considérons N nombres $x_1, x_2, \dots, x_N$ et leurs images par la fonction linéaire de coefficient a , que l'on dispose dans un tableau de valeurs de cette fonction :

x	x_1	x_2	...	x_N
$f(x)$	ax_1	ax_2	...	ax_N

On obtient clairement un **tableau de proportionnalité de coefficient a** .

■ PROPRIÉTÉ :

Si une fonction est linéaire, alors tout tableau de valeurs qui lui est associé est un tableau de proportionnalité

■ CONTRAPOSÉE :

Si un tableau de valeurs associé à une fonction n'est pas un tableau de proportionnalité, alors cette fonction n'est pas une fonction linéaire.

Remarque : Par une fonction linéaire de coefficient a : De même, si λ est un nombre quelconque :

$$0 \mapsto a \times 0 = 0$$

■ PROPRIÉTÉ :

Si une fonction est linéaire, alors 0 a pour image 0 par cette fonction.

■ CONTRAPOSÉE :

Si par une fonction, 0 n'a pas pour image 0 alors cette fonction n'est pas linéaire.



Attention

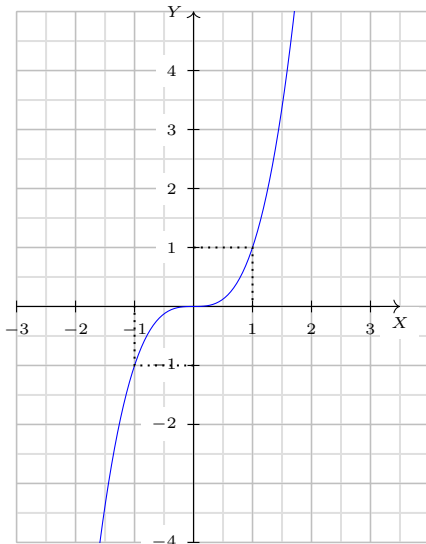
Si 0 a pour image 0 par une fonction f , alors f n'est pas nécessairement une fonction linéaire.

Exemple :

On donne un tableau de valeurs d'une certaine fonction f

x	-1	0	1
$f(x)$	-1	0	1

Ce tableau est un tableau de proportionnalité. Cependant, la fonction f n'est pas nécessairement une fonction linéaire. En effet, la fonction $x \mapsto x^3$ admet ce tableau de valeurs et n'est pas une fonction linéaire.



Remarque : Si x_1 et x_2 sont deux nombres quelconques et f la fonction linéaire de coefficient a : alors

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= a(x_1 + x_2) \\ &= ax_1 + ax_2 \\ &= f(x_1) + f(x_2) \end{aligned}$$

donc on peut calculer l'image de $x_1 + x_2$ connaissant les images de x_1 et de x_2 et sans utiliser le coefficient a de la fonction linéaire.

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1) &= a(\lambda x_1) \\ &= a\lambda x_1 \\ &= \lambda ax_1 \\ &= \lambda(ax_1) \\ &= \lambda f(x_1) \end{aligned}$$

donc on peut calculer l'image de λx_1 connaissant l'image de x_1 et sans utiliser le coefficient a de la fonction linéaire.

Exemple :

Si f est linéaire et que $f(3) = 2$ et $f(4) = \frac{2}{3}$, alors

$$\begin{aligned} f(3 + 4) &= f(3) + f(4) \\ &= 2 + \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même, } f(15) &= f(5 \times 3) \\ &= 5 \times f(3) \\ &= 5 \times 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les propriétés bien connues des tableaux de proportionnalité.

B. Représentation graphique

Une fonction linéaire étant associée à une situation de proportionnalité, donc sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère considéré. On retiendra :

■ PROPRIÉTÉ :

Dans un repère $(O ; I, J)$, la **représentation graphique de la fonction linéaire de coefficient a** (c'est-à-dire $x \mapsto ax$) est la **droite (OA)** , où A est le point de coordonnées $(1 ; a)$.

Remarque : La représentation graphique d'une fonction linéaire est **une droite qui passe par l'origine**.

Remarque : On dit que la **la droite (OA) admet pour équation $y = ax$**

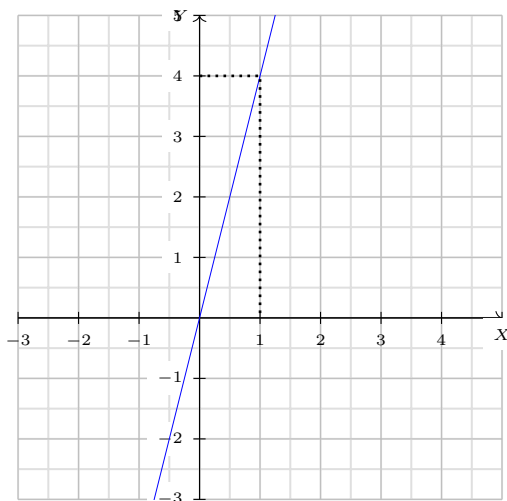
Remarque : Pour tracer cette droite, on peut évidemment utiliser un autre point que le point $(1 ; a)$

Exemple :

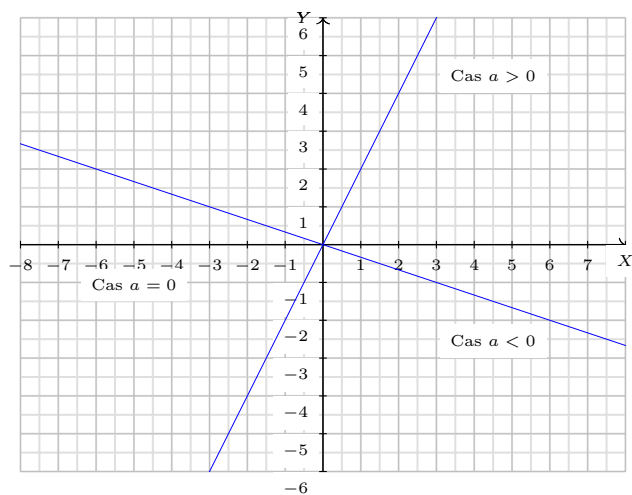
On veut représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto 4x$.

f est une fonction linéaire, donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère. De plus, $f(1) = 4$.

On place donc le point de coordonnées $(1 ; 4)$, et on obtient :



Remarque : La droite représentant une fonction linéaire prend trois aspects différents selon le signe du coefficient a :



- Dans le cas $a > 0$: le point $A(1 ; a)$ est **au-dessus** de l'axe des abscisses et la droite représente une **fonction croissante** au sens où lorsque x **croît**, $y = ax$ **croît** aussi.
- Dans le cas $a < 0$: le point $A(1 ; a)$ est en dessous de l'axe des abscisses et la droite représente une **fonction décroissante** au sens où lorsque x **décroît**, $y = ax$ **décroît** aussi.
- Dans le cas $a = 0$: le point $A(1 ; a)$ est le point $I(1 ; 0)$ et la fonction est **constante** : c'est la **fonction nulle**.

Remarque : Le nombre a donne la **direction de la droite**, c'est pourquoi on l'appelle le **coefficient directeur de la droite (OA) d'équation : $y = ax$** (on dit que deux droites ont la même **direction** si elles sont parallèles : attention, ce mot n'a pas la même signification en français courant)

On peut donc, à partir de l'observation de la droite représentative d'une fonction linéaire, déterminer le signe de a .

On peut aussi déterminer une valeur approchée de a :

Exemple :

Sur le graphique précédent, dans le cas où $a > 0$, on appelle f la fonction représentée graphiquement.

Il semble que $f(1) = 2$ donc $a \times 1 = 2$

donc $a = \frac{2}{1}$ donc $a = 2$

On aurait aussi pu dire : $f(2) = 4$ donc $a \times 2 = 4$

donc $a = \frac{4}{2}$ donc $a = 2$

Donc la fonction représentée est (vraisemblablement)

$$x \mapsto 2x.$$

Exemple :

Dans le cas où $a < 0$, on appelle g la fonction représentée graphiquement.

L'image de 1 n'est pas très lisible

Il semble que $g(3) = -1$ donc $3a = -1$

donc $a = -\frac{1}{3}$.

On lit aussi que $g(6) = -2$

donc $6a = -2$, donc $a = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.

La fonction représentée est donc (vraisemblablement) la fonction définie par

$$g(x) = -\frac{1}{3}x$$

2. Fonction affine

A. Généralités

Exemple :

Une boulangerie livre des croissants chaque dimanche matin. Chaque croissant est facturé 1,50 € et la livraison est facturée forfaitairement au prix de 5 euros, quel que soit le nombre de croissants livrés. On note x le nombre de croissants achetés et livrés un certain dimanche matin et $f(x)$ le montant en euros de la facture correspondante. Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

On note x le nombre de croissants achetés.

Alors le prix payés pour les croissants (sans la livraison) est $1,5x$

On paie ensuite 5 euros pour la livraison, et donc le prix final est $1,5x + 5$.

Donc $f(x) = 1,5x + 5$.

On dit que la fonction f est une fonction affine.

■ DÉFINITION :

On dit qu'une fonction f est **affine** s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout nombre x :

$$f(x) = ax + b$$

Autrement dit, lorsque la fonction f est définie par

$$f : x \mapsto ax + b$$

Exemple :

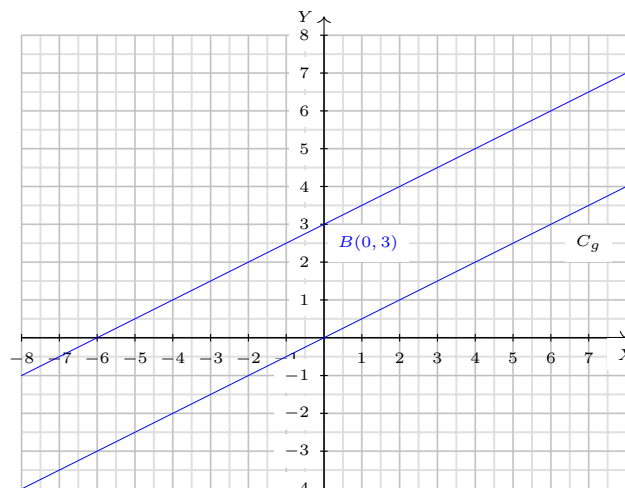
- La fonction $f : x \mapsto -3x + 2$ est-elle affine ?
Oui, avec $a = -3$ et $b = 2$
- La fonction $g : x \mapsto 4 - x$ est-elle affine ? Oui, avec $a = -1$ et $b = 4$
- Une fonction linéaire est-elle une fonction affine ? Oui, avec $b = 0$
- La fonction h définie par $h(x) = (x - 2)^2 - x^2$ est-elle affine ? Oui,
 $h(x) = x^2 - 4x + 4 - x^2 = -4x + 4$, donc $a = -4$ et $b = 4$

B. Représentation graphique

Exemple :

On considère la fonction affine f définie pour tout nombre x par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ et la fonction linéaire g définie par : $g(x) = \frac{1}{2}x$.

Sur le graphique ci-dessous est donnée l'allure de la droite représentative de la fonction g . On a placé le point $B(0 ; 3)$.

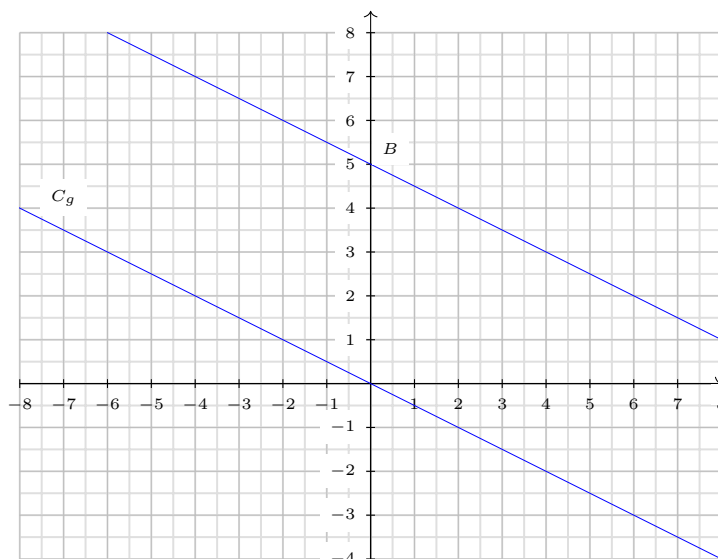


À l'aide du calcul des coordonnées de quelques points, conjecturer l'allure de la courbe représentative de la fonction f .

Plus généralement, on admettra :

■ PROPRIÉTÉ :

Dans un repère $(O ; I, J)$, la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est la droite passant par le point $B(0 ; b)$ et qui est parallèle à la droite représentant la fonction linéaire $g : x \mapsto ax$



Remarque : La droite $(\mathcal{C}_f)$ est l'image de la droite $(\mathcal{C}_g)$ par la translation qui transforme le point O en B .

Remarque : On a vu que le nombre a détermine la direction de la droite représentative de la fonction g : comme la droite représentant f et la droite représentant g sont parallèles, le nombre a détermine donc aussi la direction de la droite représentant la fonction f : c'est donc son **coefficient directeur**.

■ PROPRIÉTÉ :

Deux droites sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

Remarque : La courbe représentative d'une fonction affine étant une droite, pour la tracer, deux points suffisent. S'il n'est pas utilisé pour le tracé, il faudra bien vérifier que le point $B(0 ; b)$ semble bien appartenir à la droite tracée.

C. Déterminer les coefficients d'une fonction affine

■ PROPRIÉTÉ :

Soit f une fonction affine telle qu'il existe a et b deux nombres tels que $f(x) = ax + b$ et $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de cette fonction. Soient $A(x_A ; f(x_A))$ et $B(x_B ; f(x_B))$ deux points distincts de $\mathcal{C}_f$ c'est-à-dire $x_B \neq x_A$.

Alors

$$a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\text{"différence des ordonnées"}}{\text{"différence de abscisses"}}$$

Exemple :

On veut déterminer le coefficient directeur de la fonction affine f telle que $f(2) = 4$ et $f(4) = 10$.

f est affine, donc il existe a et b deux entiers tels que $f(x) = ax + b$ avec

$$a = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

Une fois a connu, on peut alors résoudre une équation comme dans l'exemple suivant :

Exemple :

On continue l'exemple précédent pour déterminer a : comme $f(2) = 4$, on a $3 \times 2 + b = 4$

D'où $6 + b = 4$

Ainsi $b = -2$

On obtient finalement $f(x) = 3x - 2$.

■ MÉTHODE : Déterminer graphiquement un coefficient directeur

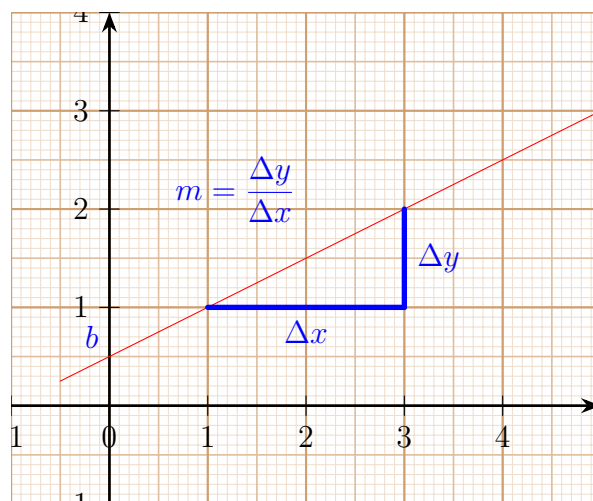
On peut lire le coefficient directeur d'une droite sur un graphique :

- Choisir deux points A et B (distincts) sur la droite.
- Se déplacer de A vers B par la méthode « de l'escalier »
- En déduire le coefficient directeur :

$$\frac{\text{« Déplacement vertical »}}{\text{« Déplacement horizontal »}}$$

Exemple :

On considère la droite suivante :



$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{1}{2}$$

Le coefficient directeur de cette droite est $\frac{1}{2}$.

■ MÉTHODE :

Graphiquement, pour déterminer b , il suffit de lire l'**ordonnée à l'origine** au point d'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, $b = \frac{1}{2}$

Donc la fonction affine cherchée est définie, pour tout nombre x ,

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$