

Équations

1. Définitions et vocabulaire

■ DÉFINITION :

Une **équation** est une égalité qui contient une valeur à déterminer, souvent désignée par une lettre ($x, y, z, a, b, c, \dots$). On peut remplacer la lettre par n'importe quel nombre lorsque l'égalité a un sens. Celle-ci peut être vraie pour certaines valeurs et fausse pour d'autres.

Exemple :

$x + 2 = 3$ est une équation.

- Cette équation est vérifiée pour $x = 1$.
- Cette équation n'est pas vérifiée pour $x = 4$.

Ici, on peut même dire que cette équation est vraie **si et seulement si** $x = 1$, ce que l'on note

$$x + 2 = 3 \iff x = 1$$

■ DÉFINITION :

La lettre (souvent x) qui représente la valeur à déterminer dans l'équation, s'appelle l'**inconnue**.

■ DÉFINITION :

Résoudre une équation, c'est trouver l'ensemble des valeurs de l'inconnue telles que l'égalité est vraie. Pour résoudre une équation, on cherche à répondre à la question : « Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vraie ? ».

■ DÉFINITION :

Les **solutions de l'équation** sont les valeurs pour lesquelles une équation est vérifiée.

Exemple :

L'**unique** solution de l'équation $x + 5 = 9$ est 4 .

En effet $4 + 5 = 9$ et il n'y a pas d'autres solutions.

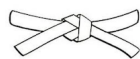
Remarque : Résoudre une équation, c'est chercher l'ensemble des solutions de l'équation.

■ DÉFINITION :

Les deux « parties » de l'équation (qui se trouvent à droite et à gauche du signe $=$) sont appelées les **membres** de l'équation.

On appelle **membre de gauche** la partie à gauche du signe $=$ et **membre de droite** la partie à droite du signe $=$.

2. Équations sans opération nécessaire



Exemple :

Considérons l'équation $x = 3$.

- Cette équation est vérifiée quand x prend la valeur 3
- Cette équation n'est pas vérifiée quand x ne prend pas la valeur 3

On a donc directement trouvé la valeur de x .



Attention

On doit toujours préciser l'ensemble des solutions d'une équation. On note $\mathcal{S} = \{ \dots \}$ et on note entre les accolades les solutions de l'équation.

Exemple :

Pour l'équation $x = 3$, on a $\mathcal{S} = \{3\}$.

3. Équations avec des additions



■ MÉTHODE :

Pour résoudre une équation, on a toujours le droit d'ajouter le même nombre **dans chaque membre** de l'équation ; cela ne change pas les solutions de l'équation et permet d'isoler x .

Exemple :

$$\begin{aligned} x + 3 &= 4 \\ \iff x &= 1 \\ \mathcal{S} &= \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 4 &= -2 \\ \iff x &= 2 \\ \mathcal{S} &= \{2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2 &= -3 \\ \iff x &= -5 \\ \mathcal{S} &= \{-5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 9 &= -4 \\ \iff x &= -13 \\ \mathcal{S} &= \{-13\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 5 &= 1 \\ \iff x &= -4 \\ \mathcal{S} &= \{-4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 3 &= -1 \\ \iff x &= 2 \\ \mathcal{S} &= \{2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 3 &= 2 \\ \iff x &= 5 \\ \mathcal{S} &= \{5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 7 &= -7 \\ \iff x &= 0 \\ \mathcal{S} &= \{0\} \end{aligned}$$

4. Équations avec des multiplications



MÉTHODE :

Pour résoudre une équation, on a toujours le droit de multiplier par un même nombre **dans chaque membre** de l'équation. Si ce nombre est non nul, cela ne change pas les solutions de l'équation et permet d'isoler x .

Exemples :

$$\begin{aligned} 2x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \\ \mathcal{S} &= \{2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x &= -4 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \\ \mathcal{S} &= \{-1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \\ \mathcal{S} &= \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{2} \\ \mathcal{S} &= \left\{-\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \\ \mathcal{S} &= \{-2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -8x &= -48 \\ \Leftrightarrow x &= 6 \\ \mathcal{S} &= \{6\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x &= -1 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{5} \\ \mathcal{S} &= \left\{-\frac{1}{5}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \\ \mathcal{S} &= \{0\} \end{aligned}$$

Exemples :

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{6} \\ \mathcal{S} &= \left\{\frac{1}{6}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{13}{12}x &= \frac{8}{9} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{32}{39} \\ \mathcal{S} &= \left\{\frac{32}{39}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= 18 \\ \mathcal{S} &= \{18\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{36} &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x &= 9 \\ \mathcal{S} &= \{9\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{6}{4}x &= 9 \\ \Leftrightarrow x &= -6 \\ \mathcal{S} &= \{-6\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{x}{5} &= -\frac{4}{20} \\ \Leftrightarrow x &= 1 \\ \mathcal{S} &= \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{5}{6}x &= \frac{20}{3} \\ \Leftrightarrow x &= -8 \\ \mathcal{S} &= \{-8\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{23x}{51} &= \frac{72}{48} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{153}{46} \\ \mathcal{S} &= \left\{-\frac{153}{46}\right\} \end{aligned}$$

5. Équations avec additions et multiplications



MÉTHODE :

On applique d'abord la méthode des équations avec additions, puis celle des équations avec multiplications, et ainsi trouver l'ensemble des solutions.

Exemples :

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 3 \\ \Leftrightarrow 2x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \\ \mathcal{S} &= \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -9x + 2 &= 116 \\ \Leftrightarrow -9x &= 114 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{38}{3} \\ \mathcal{S} &= \left\{-\frac{38}{3}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 3 &= 9 \\ \Leftrightarrow 4x &= 12 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \\ \mathcal{S} &= \{3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x - 3 &= -4 \\ \Leftrightarrow -2x &= -1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \\ \mathcal{S} &= \left\{\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5x + 8 &= 12 \\ \Leftrightarrow -5x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{4}{5} \\ \mathcal{S} &= \left\{-\frac{4}{5}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + 27 &= -48 \\ \Leftrightarrow -x &= -75 \\ \Leftrightarrow x &= 75 \\ \mathcal{S} &= \{75\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 11 &= -9 \\ \Leftrightarrow 4x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \\ \mathcal{S} &= \left\{\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0x + 5 &= -7 \\ \text{Aucune solution} \\ \mathcal{S} &= \emptyset \end{aligned}$$

6. Équations avec développement



MÉTHODE :

On peut utiliser la distributivité simple ou double pour résoudre certaines équations.

Exemple :

$$\begin{aligned} 3(x + 1) &= 3 \\ \Leftrightarrow 3x + 3 &= 3 \\ \Leftrightarrow 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \\ \mathcal{S} &= \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3(-2x + 9) &= 27 \\ \Leftrightarrow 6x - 27 &= 27 \\ \Leftrightarrow 6x &= 54 \\ \Leftrightarrow x &= 9 \\ \mathcal{S} &= \{9\} \end{aligned}$$

7. Équations avec l'inconnue dans les deux

membres



MÉTHODE :

On regroupe les termes « en x » dans un des membres et les termes constants dans l'autre membre.

Exemples :

$$4x + 3 = 3x + 4$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\mathcal{S} = \{1\}$$

$$-2x - 3 = -5x + 7$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 = 7$$

$$\Leftrightarrow 3x = 10$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{10}{3}}$$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{10}{3}\right\}$$

$$5x - 3 = 9x + 6$$

$$\Leftrightarrow -3 = 4x + 6$$

$$\Leftrightarrow -9 = 4x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{9}{4}}$$

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{9}{4}\right\}$$

$$-5x + 6 = -4x + 21$$

$$\Leftrightarrow 6 = x + 21$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -15}$$

$$\mathcal{S} = \{-15\}$$

$$-x + 8 = -2x + 4$$

$$\Leftrightarrow x + 8 = 4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -4}$$

$$\mathcal{S} = \{-4\}$$

$$21x - 17 = -14x + 3$$

$$\Leftrightarrow 35x - 17 = 3$$

$$\Leftrightarrow 35x = 20$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{4}{7}}$$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{4}{7}\right\}$$

$$-3x + 3 = 5x - 9$$

$$\Leftrightarrow 3 = 8x - 9$$

$$\Leftrightarrow 12 = 8x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$-12x + 35 = 27 - 16$$

$$\Leftrightarrow -12x + 35 = 11$$

$$\Leftrightarrow -12x = -24$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 2}$$

$$\mathcal{S} = \{2\}$$

8. Équations produit nul



DÉFINITION :

On appelle **équation produit nul** une équation donc l'un des membres est un produit et l'autre membre est 0.

Exemple :

$(3x + 1)\left(-2x + \frac{1}{2}\right) = 0$ est une équation produit nul.

On peut essayer de développer. On obtient :

$$(3x + 1)\left(-2x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x^2 + \frac{3}{2}x - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

Mais on ne sait pas (pour l'instant) résoudre une équation de ce type...

PROPRIÉTÉ :

Soient a et b deux nombres réels.

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

Exemple :

$$(3x + 1)\left(-2x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \text{ ou } -2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = -1 \text{ ou } -2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{1}{4}$$

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right\}$$

Remarque : Les équations produit nul n'ont pas nécessairement plusieurs solutions.

Exemple :

$$(2x + 4)(-8x - 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \text{ ou } -8x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = -4 \text{ ou } -8x = 16$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = -2$$

$$\mathcal{S} = \{-2\}$$

Remarque : Grâce aux identités remarquables, on peut se ramener à des équations produit nul :

Exemple :

$$4x^2 - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 8)(2x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \text{ ou } 2x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 8 \text{ ou } 2x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -4$$

$$\mathcal{S} = \{-4; 4\}$$