

Trigonométrie

1. Introduction

Il est possible de considérer les triangles rectangles sous différents points de vue :

- Point de vue angulaire : un triangle rectangle possède un angle droit et deux angles aigus complémentaires.
- Point de vue des longueurs : un triangle rectangle possède une hypoténuse et les deux côtés de l'angle droit.

Mais est-il possible de passer d'un « monde à l'autre » ? La réponse est affirmative, et c'est le but de ce nouveau chapitre et de la trigonométrie de manière générale.

A. Vocabulaire

RAPPEL :

Dans un triangle rectangle, le plus grand côté s'appelle l'**hypoténuse**.

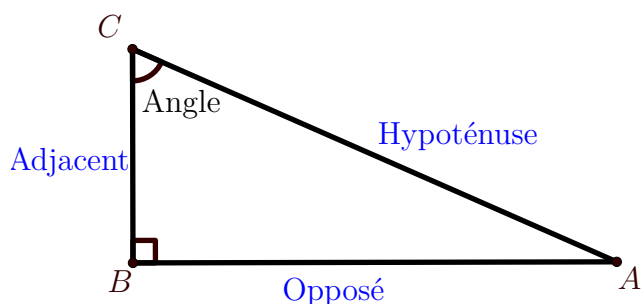
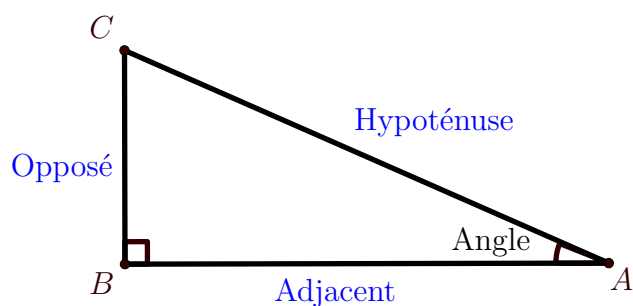
DÉFINITION :

Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit sont appelés **côté opposé** et le **côté adjacent** en fonction de l'angle considéré.



Attention

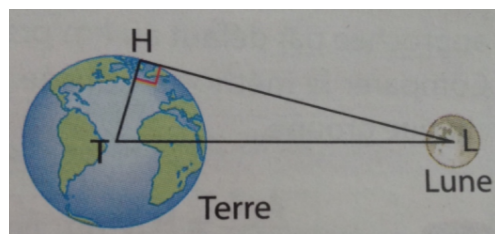
Il est très important d'avoir précisé l'angle dont on parle afin de pouvoir indiquer quels sont le côté opposé et le côté adjacent.



$[BA]$ est le côté adjacent à l'angle $\hat{A}$
 $[CB]$ est le côté adjacent à l'angle $\hat{C}$

B. Histoire du cosinus

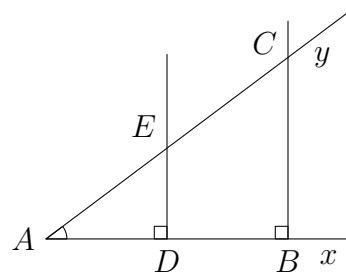
Au II^e siècle avant J.-C., Hipparque de Nicée (astronome grec) s'est servi d'une éclipse pour estimer la distance Terre - Lune. On savait à l'époque que le rayon de la Terre TH était environ de 6400 km et que l'angle $\widehat{LTH}$ valait environ $89,12^\circ$. Mais comment arriver à relier ces informations pour trouver TL ? C'est le but de la trigonométrie.



Nous allons, avec l'activité suivante, essayer de comprendre le travail qui a permis de répondre à cette question.

C. Première approche

Activité : conjecture¹ Ouvrir l'application « Trigonométrie » sur votre tablette, et cliquer sur « activité 1 - Cosinus d'un angle aigu », puis répondre aux questions posées (jusqu'à la question 3 incluse).



Bilan : Dans un triangle ABC rectangle en B , le rapport $\frac{AB}{AC}$ ne dépend que de la mesure de l'angle $\hat{A}$.

Ainsi, on a réussi à relier le monde des angles et le monde des longueurs par l'intermédiaire de ce rapport : un quotient de longueurs qui dépend d'un angle ! Nous allons appeler cette découverte le *cosinus*.

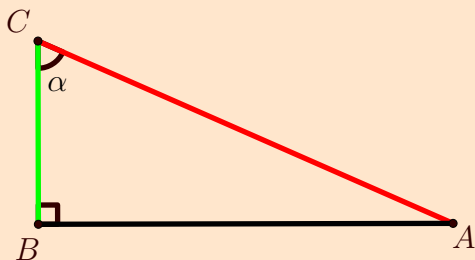
1. Faire une *conjecture*, c'est émettre une hypothèse, une supposition, c'est-à-dire que quelque chose semble être vrai, mais on ne l'a pas encore démontré. Nous avons vu qu'il est primordial en mathématiques de *démontrer* les affirmations que l'on fait ; ces affirmations deviennent alors des propriétés.

2. Cosinus d'un angle aigu

A. Définition et propriété

■ DÉFINITION :

Dans un triangle rectangle, on appelle **cosinus de l'angle** α , noté $\cos(\alpha)$, le quotient de la longueur du côté adjacent de l'angle α par celle de l'hypoténuse.



On a donc :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{« Adjacent de l'angle } \alpha \text{ »}}{\text{« Hypoténuse »}}.$$



Attention

On connaît déjà la mesure d'un angle, qui est un nombre qui s'exprime en degrés. Le cosinus d'un angle est une autre caractéristique de cet angle, qui n'a pas d'unité.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit α un nombre strictement supérieur à 0 et strictement inférieur à 90. Alors

$$0 < \cos(\alpha) < 1$$

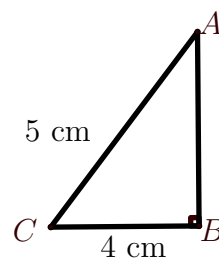
Démonstration. Un cosinus est un quotient de longueurs non nuls, donc un nombre strictement positif. De plus, on sait que l'hypoténuse est le plus long côté. Donc dans le quotient $\frac{\text{« Adjacent »}}{\text{« Hypoténuse »}}$, le numérateur est toujours strictement inférieur au dénominateur, et donc le cosinus d'un angle est toujours strictement inférieur 1. On en conclut que

$$0 < \cos(\alpha) < 1$$

□

Exemple :

Si on connaît les deux longueurs nécessaires, on peut calculer le cosinus d'un angle en appliquant la définition. Considérons le triangle ABC ci-dessous :



1. Rappeler la valeur de AB .

On sait que le triangle ABC est rectangle en B . Donc, d'après le théorème de Pythagore, $AB = 3$ cm.

2. Calculer $\cos(\widehat{BCA})$.

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Donc } \cos(\widehat{ACB}) = \frac{4}{5}.$$

Parfois, on ne connaît pas la longueur de l'un des deux côtés, mais on a la mesure de l'angle. Ainsi, on peut calculer le cosinus grâce à la calculatrice.

Avant tout calcul, la calculatrice doit être mise en « mode

degré » : , puis  et 

Pour vérifier, taper     .

Si le résultat est $\frac{1}{2}$, tout va bien :

on vient de calculer le cosinus d'un angle de 60° !

Exemple :

Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$ dans la figure précédente, en supposant que l'angle mesure environ $36,87^\circ$, et retrouver le résultat énoncé à l'exemple.

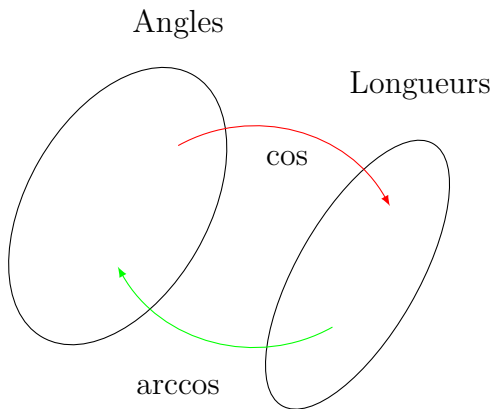
Exemple :

Répondre aux questions suivantes grâce à la calculatrice (arrondir les résultats au millième) :

- $\cos(24^\circ) \approx 0,9135$, donc $\approx 0,914$
- $\cos(45^\circ) \approx 0,7071$, donc $\approx 0,707$
- $\cos(40^\circ) \approx 0,7660$, donc $\approx 0,766$
- $\cos(60^\circ) = 0,5$

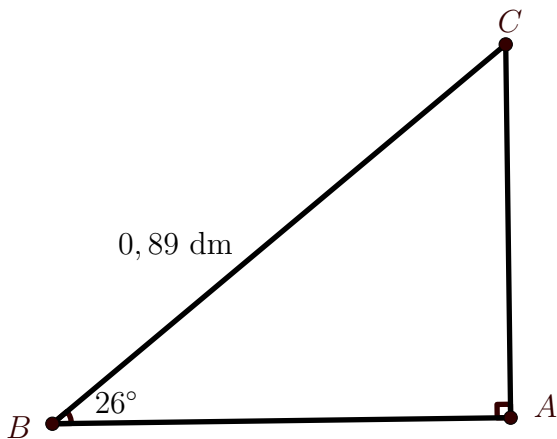
B. Applications

Le cosinus est un « objet mathématique » qui permet de passer du monde des angles au monde des longueurs. On peut donc, grâce au cosinus, voyager d'un monde à l'autre, et réciproquement, en utilisant l'arccosinus (noté arccos), comme le montre la représentation ci-dessous.



Exemple : Calcul de la longueur d'un cathète

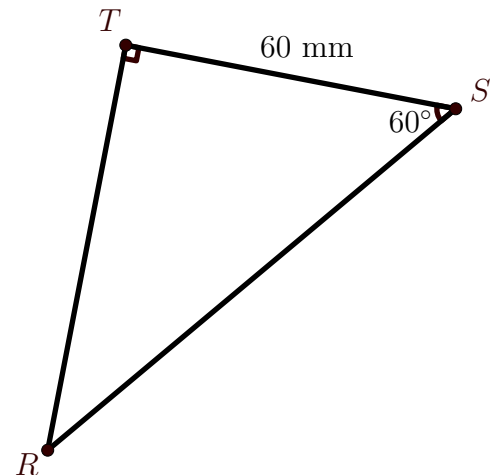
On considère la figure ci-dessous. Déterminer la longueur de AB .



Dans le triangle ABC rectangle en A , d'après la définition du cosinus, on a $\cos(\widehat{CBA}) = \frac{AB}{BC}$, c'est-à-dire $\cos(26^\circ) = \frac{AB}{0,89}$. Donc, en multipliant chaque membre par $0,89$, on obtient $AB = 0,89 \cos(26^\circ)$.

Grâce à la calculatrice, on obtient $AB \approx 0,80 \text{ dm}$, c'est-à-dire $AB \approx 8,0 \text{ cm}$.

Exemple : Calcul de la longueur de l'hypoténuse
On considère la figure ci-dessous. Déterminer la longueur RS .



Dans le triangle RST rectangle en T , d'après la définition du cosinus, on a $\cos(\widehat{RST}) = \frac{ST}{SR}$, c'est-à-dire $\cos(60^\circ) = \frac{60}{SR}$.

En remarquant que $\cos(60^\circ) = \frac{\cos(60^\circ)}{1}$, on obtient $\frac{\cos(60^\circ)}{1} = \frac{60}{SR}$. Donc, d'après l'égalité des produits en croix, $60 \times 1 = \cos(60^\circ) \times SR$, c'est-à-dire $SR = \frac{60}{\cos(60^\circ)}$.

Grâce à la calculatrice, on obtient $SR = 120 \text{ mm}$, c'est-à-dire $SR = 12 \text{ cm}$.

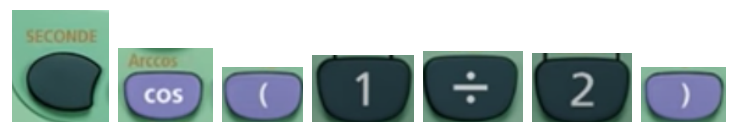
C. Calcul de la mesure d'un angle

Lorsque l'on veut utiliser la trigonométrie pour calculer une mesure d'angle, on utilise la flèche verte dans la représentation ci-dessus. Pour effectuer ce « retour », on utilise la fonction arccos (lue arccosinus) de la calculatrice. Par exemple, on a vu que la mesure d'un angle dont le cosinus est $\frac{1}{2}$ vaut 60° .

Donc $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$. Ainsi, les deux égalités suivantes sont équivalentes :

$$\bullet \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \quad \bullet 60^\circ = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

On retrouve le résultat grâce à la calculatrice, en tapant :



La calculatrice doit répondre 60 , si tout est bien configuré.

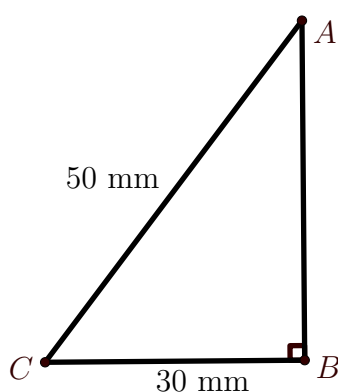
Exemple :

Déterminer la mesure des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ et $\hat{D}$ (arrondie au degré), tels que :

- $\cos(\hat{A}) = 0,8$ donc $\hat{A} = \arccos(0,8) \approx 37^\circ$
- $\cos(\hat{B}) = 0,1$ donc $\hat{B} = \arccos(0,1) \approx 84^\circ$
- $\cos(\hat{C}) = 0,42$ donc $\hat{C} = \arccos(0,42) \approx 65^\circ$
- $\cos(\hat{D}) = 1,3$ donc c'est impossible ! D'après la propriété de la partie 2, le cosinus d'un angle est inférieur à 1.

Exemple :

Soit ABC le triangle rectangle en B suivant :



Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$, arrondie au centième de degré.

$$\text{On a } \cos(\widehat{BCA}) = \frac{BC}{AC}, \text{ et donc } \cos(\widehat{BCA}) = \frac{BC}{AC} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}.$$

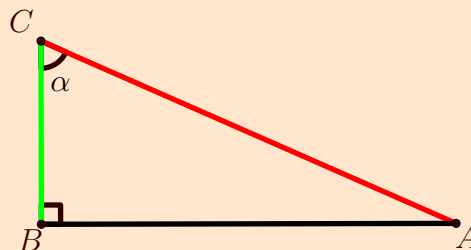
Donc, on peut utiliser $\arccos$ à la calculatrice, et on trouve que $\cos(\widehat{BCA}) = \frac{3}{5}$ devient $\widehat{BCA} = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53,13^\circ$.

3. Sinus d'un angle aigu

A. Définition et propriété

■ DÉFINITION :

Dans un triangle rectangle, on appelle **sinus de l'angle** α , noté $\sin(\alpha)$, le quotient de la longueur du côté opposé à l'angle α par celle de l'hypoténuse.



On a donc :

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{« côté opposé de l'angle } \alpha \text{ »}}{\text{« Hypoténuse »}}.$$



Attention

Le sinus d'un angle est un nombre **sans unité**.

■ PROPRIÉTÉ :

Soit α un nombre strictement supérieur à 0 et strictement inférieur à 90. Alors :

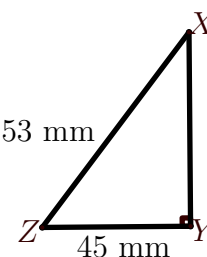
$$0 < \sin(\alpha) < 1$$

Exemple :

On peut calculer un sinus en appliquant la définition.

Considérons le triangle XYZ ci-contre.

Calculer $\sin(\widehat{ZXY})$



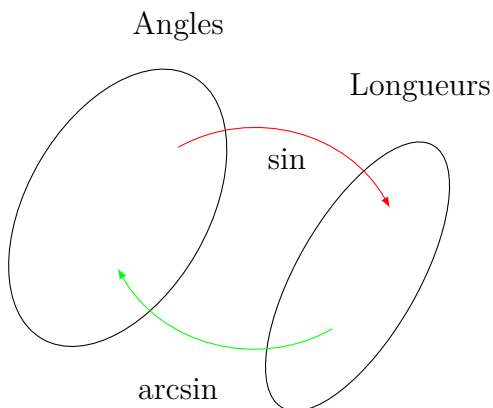
Dans le triangle XYZ rectangle en Y , calculons $\sin(\widehat{ZXY})$:

$$\sin(\widehat{ZXY}) = \frac{ZY}{XZ} = \frac{45}{53}$$

$$\text{Donc } \sin(\widehat{ZXY}) = \frac{45}{53}.$$

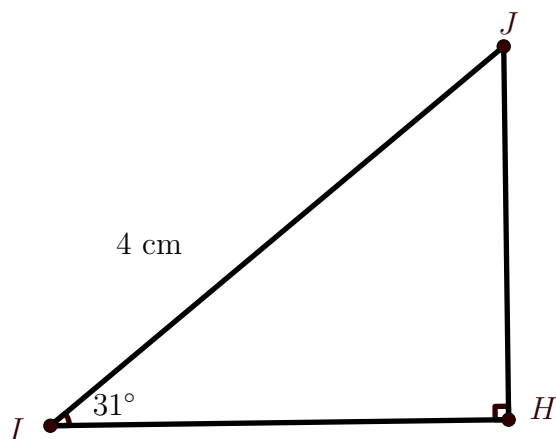
B. Applications

Le sinus, tout comme le cosinus, est un « objet mathématique » qui permet de passer du monde des angles au monde des longueurs. On peut donc, grâce au sinus, voyager d'un monde à l'autre, et réciproquement, en utilisant l'arcsinus (noté $\arcsin$), comme le montre la représentation ci-dessous.



Exemple : Calcul de la longueur d'un cathète

On considère la figure ci-dessous.
Déterminer la longueur HJ .

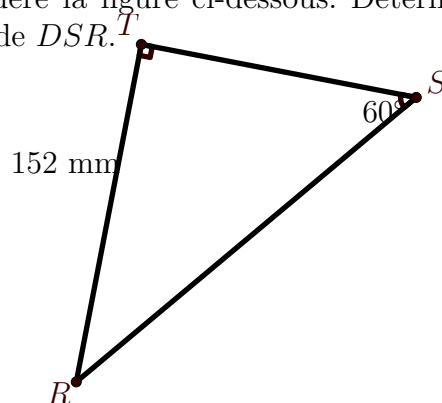


Dans le triangle HIJ rectangle en H , d'après la définition du sinus, on a $\sin(\widehat{HIJ}) = \frac{HJ}{IJ}$, c'est-à-dire $\sin(31^\circ) = \frac{HJ}{4}$. Donc, en multipliant chaque membre par 4, on obtient $HJ = 4 \sin(31^\circ)$.

Grâce à la calculatrice, on obtient $HJ \approx 2,06 \text{ cm}$.

Exemple : Calcul de la longueur de l'hypoténuse

On considère la figure ci-dessous. Déterminer la longueur de DSR .



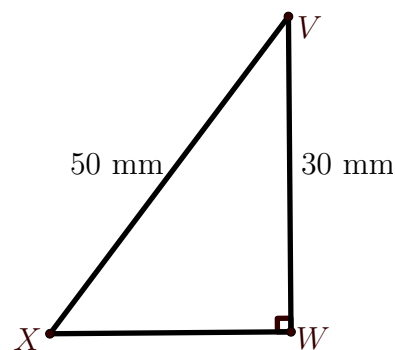
Dans le triangle RST rectangle en T , d'après la définition du cosinus, on a $\sin(\widehat{RST}) = \frac{RT}{SR}$, c'est-à-dire $\sin(60^\circ) = \frac{152}{SR}$.

En remarquant que $\sin(60^\circ) = \frac{\sin(60^\circ)}{1}$, on obtient $\frac{\sin(60^\circ)}{1} = \frac{152}{SR}$. Donc, d'après l'égalité des produits en croix, $152 \times 1 = \sin(60^\circ) \times SR$, c'est-à-dire $SR = \frac{152}{\sin(60^\circ)}$.

Grâce à la calculatrice, on obtient $SR = \frac{304\sqrt{3}}{3} \text{ mm}$, c'est-à-dire $SR \approx 175,51 \text{ mm}$.

Exemple : Calcul de la mesure d'un angle

Soit VWX le triangle rectangle en W suivant.



Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{VXW}$, arrondie au centième de degré.

On a $\sin(\widehat{VXW}) = \frac{VW}{WX}$, et donc $\sin(\widehat{VXW}) = \frac{VW}{VX} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$.

Donc, on peut utiliser arcsin à la calculatrice, et on trouve que $\cos(\widehat{VXW}) = \frac{3}{5}$ devient

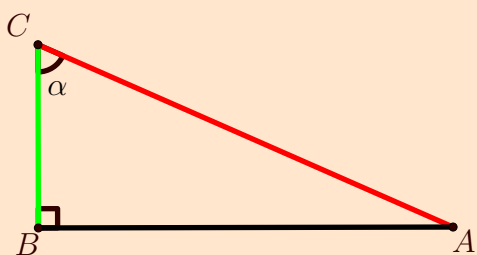
$$\widehat{VXW} = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \approx 36,86^\circ$$

4. Tangente d'un angle aigu

A. Définition et propriété

■ DÉFINITION :

Dans un triangle rectangle, on appelle **tangente de l'angle** α , noté $\tan(\alpha)$, le quotient de la longueur du côté opposé de l'angle α par celle du côté adjacent à l'angle α .



On a donc :

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{« côté opposé de l'angle } \alpha \text{ »}}{\text{« côté adjacent de l'angle »}}.$$



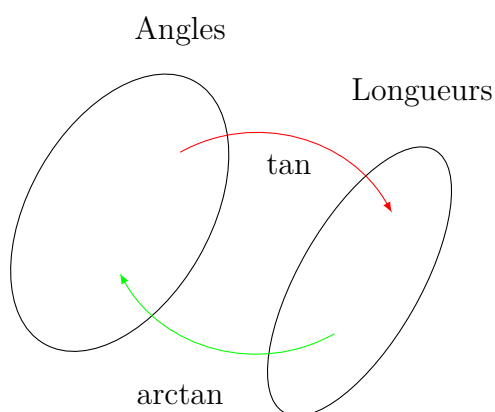
Attention

La tangente d'un angle est un nombre **sans unité**.

Remarque : Soit α un nombre strictement compris entre 0 et 90. À la différence de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ n'est pas nécessairement compris entre 0 et 1. $\tan(\alpha)$ peut être supérieur à 1.

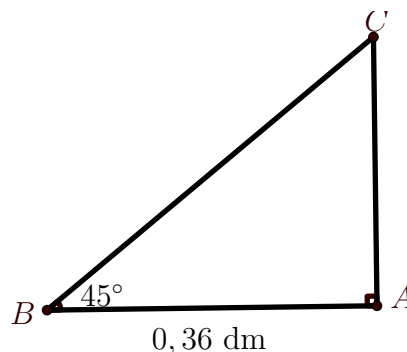
B. Applications

La tangente, tout comme le cosinus et le sinus, est un « objet mathématique » qui permet de passer du monde des angles au monde des longueurs. On peut donc, grâce à la tangente, voyager d'un monde à l'autre, et réciproquement, en utilisant l'arctangente (noté $\arctan$), comme le montre la représentation ci-dessous.



Exemple : Calcul de la longueur de l'hypoténuse

On considère la figure ci-dessous. Montrer (grâce à la trigonométrie) que le triangle ABC est isocèle en A .



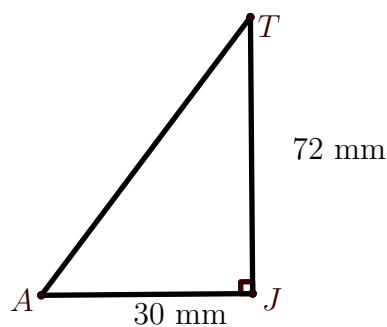
Dans le triangle ABC rectangle en A , d'après la définition de la tangente, on a $\tan(\widehat{CBA}) = \frac{AC}{AB}$, c'est-à-dire $\tan(45^\circ) = \frac{AC}{0,36}$. Donc, en multipliant chaque membre par 0,36, on obtient $AB = 0,36 \times \tan(45^\circ)$.

Grâce à la calculatrice, on obtient $AB = 0,36$ dm. On en conclut que $AB = AC$, et donc que le triangle ABC est isocèle en A .

On aurait aussi pu remarquer que la somme des mesures des angles dans le triangle ABC fait 180° , et donc $\widehat{ACB} = 45^\circ$, et donc le triangle ACB est isocèle en A , mais ce raisonnement n'implique pas la trigonométrie.

Exemple : Calcul de la mesure d'un angle

Soit TAJ le triangle rectangle en J suivant.



Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{TAJ}$, arrondie au centième de degré.

$$\text{On a } \tan(\widehat{BCA}) = \frac{TJ}{AJ}, \text{ et donc } \tan(\widehat{TAJ}) = \frac{TJ}{AJ} = \frac{72}{30} = \frac{12}{5}.$$

Donc, on peut utiliser $\arctan$ à la calculatrice, et on trouve que $\tan(\widehat{TAJ}) = \frac{12}{5}$ devient $\widehat{TAJ} = \arctan\left(\frac{12}{5}\right) \approx 67,38^\circ$.