

Calcul littéral

1. Généralités

A. Définitions

■ DÉFINITION :

Une **expression** est une succession de symboles organisée selon les règles de calcul habituelles.

■ DÉFINITION :

Une **expression littérale** est une expression dans laquelle on a remplacé certains nombres par des lettres. Ces lettres sont alors appelées les **variables**.

Remarque : Si une expression contient plusieurs fois la même lettre, alors elle désigne le même nombre.

Exemple :

$$4 \times x \times x - \frac{3 \times \pi}{41 \times (-7)} - 1 \times [34 + 2 \times (5 \times x + 7)]$$
$$4x^2 - \frac{3\pi}{-41 \times 7} - [34 + 2(5x + 7)]$$

■ DÉFINITION :

Certains expressions portent des noms, en fonction de la dernière opération qui a été effectuée : une **somme**, une **différence**, un **produit** ou un **quotient**.

Exemple :

$2 \times x + 6$ est une **somme**

$x - (3 + 8 \times x^2)$ est une **différence**

$\frac{x^2 - 5 \times \pi^2}{x + 3 \times x}$ est un **quotient**

$7 \times \frac{3 + x}{3 - x}$ est un **produit**

B. Conventions d'écriture

Afin de rendre l'écriture plus compacte et ainsi de la rendre plus facilement lisible, on décide que :

— Le signe de la multiplication ($\times$) disparaît

- entre deux lettres : $x \times y$ est noté xy .
- entre un nombre et une lettre : $2 \times x$ est noté $2x$
- entre des nombres et des parenthèses :
 $3 \times (-2 + x)$ est noté $3(-2 + x)$
- entre des lettres et des parenthèses :
 $x \times (-2 + x)$ est noté $x(-2 + x)$

— On conserve le signe de la multiplication :

- entre deux nombres : 12×3 (sinon on lirait 123...)
- Entre un nombre positif et un nombre négatif : on note $3 \times (-7)$.

— On accepte (bien sûr...) la notation puissance :

$$x^2 = x \times x, x^3 = x \times x \times x, \text{ etc...}$$

c'est-à-dire, pour n un entier strictement positif,

$$x^n = x^3 = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$$

— Les facteurs (c'est-à-dire les éléments de la multiplication) s'écrivent dans cet ordre :

- les nombres
- les lettres dans l'ordre alphabétique
- les parenthèses

Donc $x \times (-42) \times (x + 31) \times y$ s'écrit $-42xy(x + 31)$

Exemple :

Écrire les expressions suivantes de manière plus condensée. Attention : on ne demande pas d'effectuer les calculs !

$$A = 3 \times (2 \times x \times x - 1) \times (-3) \times x$$
$$= -3 \times 3x(2x^2 - 1)$$

$$B = x \times 3 \times (-3) \times x \times 2 \times x - x \times 1 \times (-9)$$
$$= -3 \times 3 \times 2x^3 - 9 \times (-x)$$

C. Réduire une expression

■ DÉFINITION :

Réduire une expression littérale, c'est

- Appliquer les conventions d'écriture vues précédemment
- Effectuer les calculs entre les nombres (quand c'est possible), pour écrire l'expression avec le moins possible de termes.

Exemple :

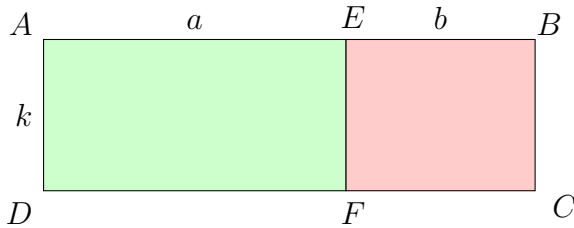
Dans l'exemple précédent, on a trouvé que

- $A = -3 \times 3x(2x^2 - 1)$
En réduisant A , on obtient $-9x(2x^2 - 1)$.
- $B = -3 \times 3 \times 2x^3 - 9 \times (-x)$
En réduisant B , on obtient $-18x^3 + 9x$.

2. Développer une expression

A. Introduction géométrique

On s'intéresse à l'aire du rectangle $ABCD$, que l'on va déterminer de deux façons. Les données, en cm, sont $AD = k$, $AE = a$ et $EB = b$.



On calcule directement l'aire du rectangle $ABCD$:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = AD \times AB$$

c'est-à-dire $\mathcal{A}_{ABCD} = k \times (a + b)$

On effectue la somme des aires des rectangles $AEFD$ et $EBCF$:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{AEFD} + \mathcal{A}_{EBCF}$$

c'est-à-dire $\mathcal{A}_{ABCD} = k \times a + k \times b$

Donc
$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

On a transformé un produit (à gauche) en somme (à droite), en « changeant de point de vue ».

B. Explication théorique

■ DÉFINITION :

Développer, c'est écrire une expression algébrique (qui est un produit) sous la forme d'une somme ou d'une différence.

Comment effectuer cette « transformation » ? On utilise la règle de la **distributivité** de la multiplication sur l'addition et la soustraction :

■ PROPRIÉTÉ : Distributivité de la multiplication sur l'addition / sur la soustraction

Si a , b et k sont des nombres, alors

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

Avec les notations condensées, on peut retenir

$$k(a + b) = ka + kb$$

■ MÉTHODE : Développer ($\times$ devient $+$)

On distribue, en identifiant le facteur :

- On identifie le **facteur k**
- On sépare les différentes parties entre les parenthèses, à l'aide « des boîtes »
- On distribue le facteur en appliquant la multiplication par k à chaque boîte.

$$k \times (a + b) = ka + kb$$

Exemples :

$$\begin{aligned} 3 \times (-4x + 7) &= 3 \times (-4x) + 3 \times 7 \\ &= -12x + 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10(3,5x^2 + 5x) &= 10 \times 3,5x^2 + 10 \times 5x \\ &= 35x^2 + 50x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2(3x - 6x^2) &= -2 \times 3x - 2 \times (-6x^2) \\ &= -6x + 12x^2 \end{aligned}$$

■ PROPRIÉTÉ : Associativité de l'addition

Signe + devant des parenthèses

On peut retirer les parenthèses en utilisant la propriété suivante :

Si a , b et c sont des nombres,

$$a + (b + c) = a + b + c$$

Exemple :

$$6 + (x + 3) = 6 + x + 3 = x + 9 = 2x + 15$$

■ PROPRIÉTÉ : Signe - devant des parenthèses

On peut retirer les parenthèses en « changeant les signes » grâce à la propriété suivante :

Si a , b et c sont des nombres,

$$\begin{aligned} a - (b + c) &= a + (-b - c) \\ &= a - b - c \end{aligned}$$

Démonstration.

On fait apparaître un **$1 \times$ caché**, qui sera le facteur à distribuer :

$$a - (b + c) = a \boxed{-1 \times} (b + c) = a \boxed{-b} \boxed{-c}$$

Exemples :

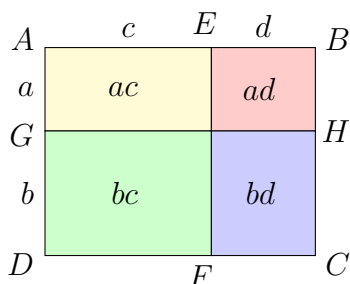
$$6 - (x + 3) = 6 - x - 3 = 3 - x$$

$$x^2 - (-9x + 7) = x^2 + 9x - 7$$

3. Double distributivité

A. Introduction géométrique

On s'intéresse à l'aire du rectangle $ABCD$, que l'on va déterminer de deux façons. Les données, en cm, sont $AG = a$, $GD = b$, $AE = c$ et $EB = d$.



On calcule directement l'aire du rectangle $ABCD$:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = AD \times AB$$

c'est-à-dire $\mathcal{A}_{ABCD} = (a + b)(c + d)$

On effectue la somme des aires des rectangles colorés :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{\text{jaune}} + \mathcal{A}_{\text{rouge}} + \mathcal{A}_{\text{vert}} + \mathcal{A}_{\text{bleu}}$$

c'est-à-dire $\mathcal{A}_{ABCD} = ac + ad + bc + bd$

B. Explication théorique

On exprime $\mathcal{A}_{ABCD}$ de deux manières différentes, ainsi les expressions obtenues sont égales. On a donc une nouvelle propriété, appelée « **double distributivité** » :

■ **PROPRIÉTÉ** : **Distributivité de la multiplication sur l'addition / sur la soustraction**

Si a , b , c et d sont des nombres, alors

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Avec les notations condensées, on peut retenir

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

On appelle cette propriété la double distributivité, car elle revient à appliquer deux fois de suite la distributivité :

$$\begin{aligned} & (a + b) \times (c + d) \\ &= a \times (c + d) + b \times (c + d) \\ &= ac + ad + bc + bd \end{aligned}$$

Exemples :

$$\begin{aligned} (x + 2)(2x + 3) &= x \times 2x + 3 \times x + 2 \times 2x + 2 \times 3 \\ &= 2x^2 + 3x + 4x + 6 = 2x^2 + 7x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x + 4)(-3x - 3) &= 2x \times (-3x) + 2x \times (-3) + 4 \times (-3x) + 4 \times (-3) \\ &= -6x^2 - 6x - 12x - 12 = -6x^2 - 18x - 12 \end{aligned}$$

4. Factorisation

■ DÉFINITION :

Factoriser, c'est écrire une expression algébrique (qui est une somme ou une différence) sous la forme d'un produit.

■ MÉTHODE : Factoriser (+ $\rightarrow$ $\times$ ou - $\rightarrow$ $\times$)

On utilise la distributivité en lisant la propriété de droite à gauche.

Exemples :

- $5x + 5y = 5 \times x + 5 \times y$
 $= 5 \times (x + y) = 5(x + y)$
- $10x + 4y = 2 \times 5 \times x + 2 \times 2 \times y$
 $= 2 \times (5 \times x + 2 \times y) = 2(5x + 2y)$
- $6x - 3y = 3 \times 2 \times x - 3 \times y$
 $= 3 \times (2 \times x - y) = 3(2x - y)$
- $3x^2 - 2x = 3 \times x \times x - 2 \times x$
 $= x \times (3 \times x - 2) = x(3x - 2)$

Remarque : Une factorisation du type :

$$4x^2 + 8x + 4 = 4(x^2 + 2x + 1)$$

par un facteur constant, indépendant de la valeur de x , ne sera pas considérée comme intéressante dans ce chapitre : on cherchera plutôt des factorisations par des termes du type $ax + b$ où a et b sont deux nombres, a étant non nul. On les appelle des **facteurs du premier degré** car ils s'écrivent $ax + b$.

Exemples :

Un objectif de ce chapitre est de factoriser des sommes du type $4 - x^2$ ou $4x^2 + 1 + 4x$ ou $x^2 + 9 - 6x$ dans lesquelles il n'y a aucun facteur commun non constant entre les termes. On peut pourtant les factoriser ! Vérifier les égalités suivantes :

- $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$
- $4x^2 + 1 + 4x = (2x + 1)(2x + 1)$
- $x^2 + 9 - 6x = (x - 3)(x - 3)$

Activité : identités remarquables

A. Carrés d'une somme ou d'une différence

Développer et réduire les produits suivants dans la partie gauche, puis vérifier le calcul avec le résultat qui est fourni dans la colonne de droite.

$$(2x + 3)(2x + 3) = 4x^2 + 12x + 9$$

$$(3x + 1)(3x + 1) = 9x^2 + 6x + 1$$

$$(4x + 2)(4x + 2) = 16x^2 + 4 + 16x$$

$$(5x + 1)(5x + 1) = 1 + 10x + 25x^2$$

$$(7x + 2)^2 = 49x^2 + 28x + 4$$

$$(2x - 3)(2x - 3) = 4x^2 - 12x + 9$$

$$(3x - 1)(3x - 1) = 9x^2 - 6x + 1$$

$$(4x - 2)^2 = 16x^2 - 16x + 4$$

$$(5x - 1)^2 = -10x + 25x^2 + 1$$

$$(7x - 2)^2 = 49x^2 - 28x + 4$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Avec un peu d'observation, on peut retrouver le produit $(2x + 3)(2x + 3)$ à partir de son développement $4x^2 + 12x + 9$, ou le produit $(5x - 1)^2$ à l'aide de son développement $25x^2 - 10x + 1$.

Ci-dessous, dans la colonne de droite, se trouvent des développements correspondant à des produits du même type que précédemment. Lorsque c'est possible, retrouver et écrire ainsi ces produits.

Attention : certains développements ne correspondent pas à ce type de produit : dans ce cas, laisser une place vide.

$$(2x + 3)(2x + 3) = 4x^2 + 12x + 9$$

$$(5x - 1)^2 = 25x^2 - 10x + 1$$

$$25x^2 + 40x + 16$$

$$36x^2 + 12x + 1$$

$$4x^2 + 1 + 4x$$

$$25x^2 - 40x + 16$$

$$25x^2 + 16 + 40x$$

$$x^2 + x + 1$$

$$25x^2 - 20x + 4$$

$$64x^2 - 24x + 9$$

$$x^2 - 6x + 9$$

$$25x^2 + 9$$

$$64x^2 + 9 - 48x$$

$$9x^2 + 42x + 49$$

À retenir :

L'expression $a^2 + b^2 + 2ab$ se factorise « automatiquement » sous la forme $(a + b)^2$.

De même, l'expression $a^2 + b^2 - 2ab$ se factorise « automatiquement » sous la forme $(a - b)^2$.

B. Différence de deux carrés

Reprendre maintenant la démarche précédente avec un autre type de produit :

$$(3x - 4)(3x + 4) =$$

$$9x^2 - 16$$

$$(2x + 3)(2x - 3) =$$

$$4x^2 - 9$$

$$(x - 1)(x + 1) =$$

$$x^2 - 1$$

$$(5 - x)(5 + x) =$$

$$25 - x^2$$

$$(a - b)(a + b) =$$

$$a^2 - b^2$$

$$x^2 - 25$$

$$9 - 25x^2$$

$$-x^2 + 4$$

$$9x^2 - 25 + 30x$$

$$36x^2 - 1$$

$$-81 + 49x^2$$

$$100x^2 - 9$$

$$36x^2 + 81$$

$$-36x^2 - 81$$

À retenir :

L'expression $a^2 - b^2$ se factorise « automatiquement » sous la forme $(a - b)(a + b)$.

5. Identités remarquables

■ PROPRIÉTÉ : Identités remarquables

Soient a et b deux nombres. Alors

- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemple :

Sur la feuille d'activité : identités remarquables

Remarque : L'expression $a^2 + b^2 + 2ab$ se factorise donc sous la forme $(a + b)^2$, c'est-à-dire sous la forme du carré d'une somme. De même pour l'expression $a^2 + b^2 - 2ab$.

En revanche, la factorisation de $a^2 - b^2$ sous la forme $(a - b)(a + b)$ ne fait pas apparaître de carré en général.



Attention

On observera que, dans le sens du développement :

- $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ en général
- $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$ en général

■ DÉFINITION : Double produit

Soient a et b deux nombres. Le terme $2ab$ dans l'expression $a^2 + b^2 + 2ab$ de $(a + b)^2$ est le **double produit**.

■ DÉFINITION : Différence de deux carrés

Soient a et b deux nombres. Une expression du type $a^2 - b^2$ est appelée une **différence de deux carrés**.