

Théorème de Thalès

1. Calculer des longueurs

■ THÉORÈME DE THALÈS

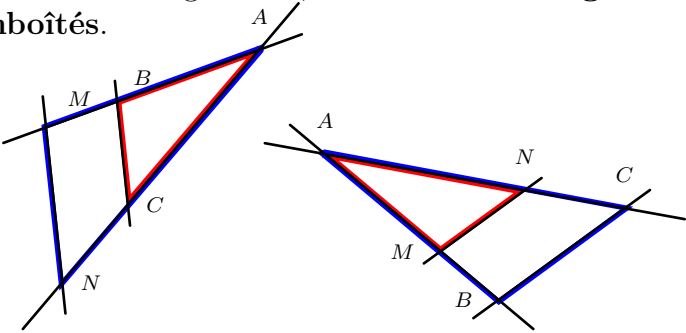
Si ABC et AMN sont deux triangles tels que

-
-
-

Alors

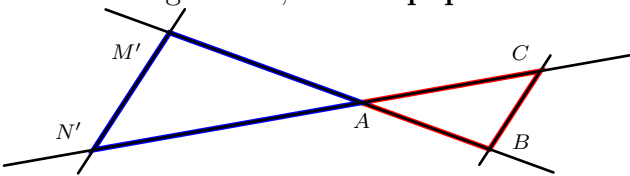
Exemple :

Première configuration, dite des **triangles emboîtés**.



Exemple :

Seconde configuration, dite du **papillon**

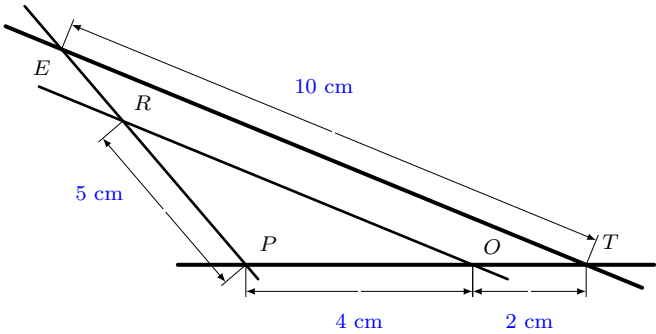


Remarque : On a également $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} = \frac{MB}{NC}$

Les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles, on a donc le tableau de proportionnalité suivant :

Exemple :

Dans la figure ci-dessous, les droites (RE) et (TO) se coupent en P et les droites (OR) et (TE) sont parallèles. On veut calculer la longueur PE puis la longueur OR .



2. Démontrer que des droites sont parallèles

■ RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

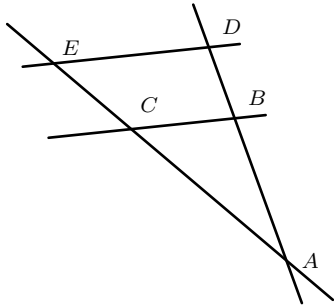
Si ABC et AMN sont deux triangles tels que

-
-
-

Alors

Exemple :

Dans la figure ci-dessous, ABC et ADE sont deux triangles tels que B est un point de la demi-droite $[AD)$ et C est un point de la demi-droite $[AE)$.
On se place dans le cas où $AB = 5,4$ cm, $AD = 7,2$ cm, $AC = 6,6$ cm et $AE = 8,8$ cm.



3. Démontrer que des droites ne sont pas parallèles

■ CONTRAPOSÉE DU THÉORÈME DE THALÈS

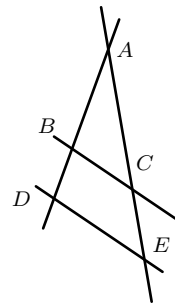
Soient ABC et AMN deux triangles tels que

-
-
-

Alors

Exemple :

Dans la figure ci-dessous, ABC et ADE sont deux triangles tels que B est un point de la demi-droite $[AD)$ et C est un point de la demi-droite $[AE)$.
On se place dans le cas où $AB = 2,4$ cm, $AD = 4,8$ cm, $AC = 1,8$ cm et $AE = 3,8$ cm.



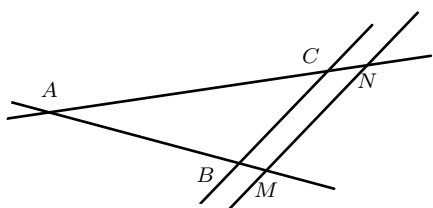


Attention

Dans l'hypothèse, vérifier l'égalité entre les longueurs des segments *issus du sommet commun* $\frac{BC}{MN}$ est très important. En effet, le rapport $\frac{BC}{MN}$ n'apparaît pas. En d'autres termes : montrer, par exemple, que $\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN}$ ne suffit pas à prouver que les droites sont parallèles.

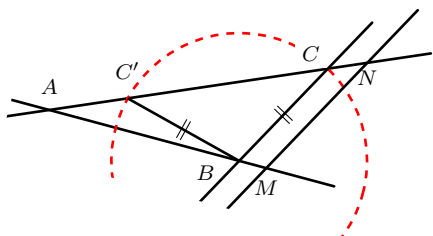
En effet, si on suppose, comme le montre le dessin suivant, que :

- A, B et M sont alignés dans cet ordre.
- A, C et N sont alignés dans le même ordre.
- (BC) et (MN) sont parallèles.



D'après le théorème de Thalès, on a en particulier

Construisons le cercle de centre B et de rayon BC . Ce cercle recoupe le segment $[AN]$ en C' .



On a par construction. D'où :

-
-
-

et pourtant,

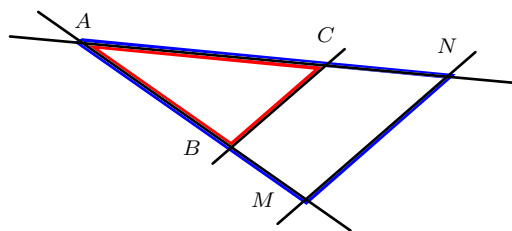
4. Démonstration de la réciproque du théorème de Thalès

On veut démontrer la propriété suivante :

Soient ABC et AMN deux triangles tels que

- A, B et M sont alignés dans cet ordre.
- A, C et N sont alignés dans le même ordre.
- $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$.

Alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



On suppose que ABC et AMN sont deux triangles tels que

- A, B et M sont alignés dans cet ordre.
- A, C et N sont alignés dans le même ordre.
- $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$.

Méthode : on va faire une démonstration par l'absurde : on suppose que les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles, et on montre alors que cela conduit à une impossibilité.

1. On suppose que (MN) et (BC) ne sont pas parallèles. Ainsi, il existe un point P de la demi-droite $[AC)$ distinct de N tel que (MP) et (BC) soient parallèles. Réaliser une figure et placer le point P .
2. Les droites (MP) et (BC) étant parallèles, quelles égalités de rapports peut-on en déduire ?
3. En déduire que $\frac{AC}{AN} = \frac{AC}{AP}$
4. Que peut-on en déduire pour les points N et P ? D'après la supposition de départ, cela est-il possible ?
5. Conclure.

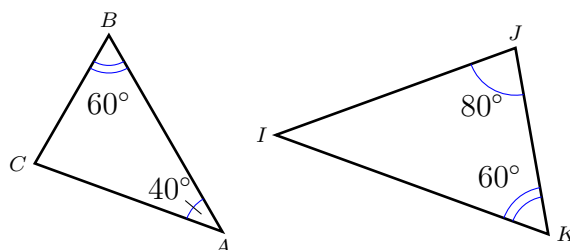
5. Triangles semblables

■ DÉFINITION :

On dit que deux triangles sont **semblables**

Exemple :

Les deux triangles suivants sont semblables.

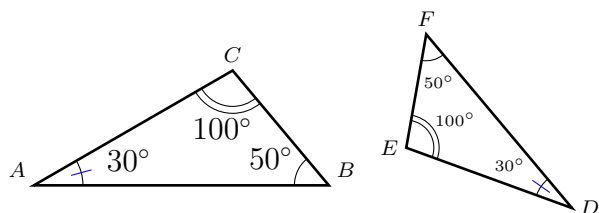


■ VOCABULAIRE :

Lorsque deux triangles sont semblables :

- Les angles égaux sont dit
- Les côtés opposés à des angles égaux sont dits
- Les sommets des angles égaux sont dits
.....

Exemple :



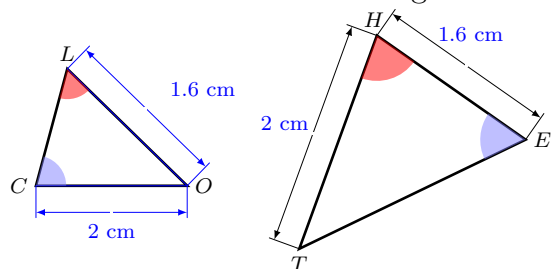
Angles homologues	Sommets homologues	Côtés homologues

■ PROPRIÉTÉ :

Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

Exemple :

Les triangles COL et THE suivants sont semblables. Calculer les longueurs CL et TE .

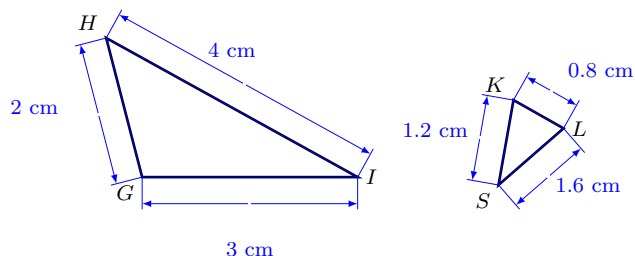


■ PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE :

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles deux à deux, alors ces triangles sont semblables.

Exemple :

On considère les deux triangles ci-dessous. Ces triangles sont-ils semblables ?



Exemple : (Configuration de Thalès)

Dans la figure suivante, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $(MN) \parallel (BC)$. Montrer que les triangles AMN et ABC sont semblables.

