

Théorème de Pythagore

1. Introduction : racine carrée

■ DÉFINITION :

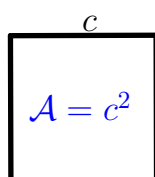
Dans un triangle rectangle, on appelle **hypoténuse** le côté opposé à l'angle droit. Les autres côtés du triangle sont appelés les **côtés de l'angle droit**.

Remarque : Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté.

Il est facile de calculer l'aire d'un carré de côté c :

$$\mathcal{A}_{\text{carré}} = c \times c = c^2$$

On calcule donc l'aire du carré en connaissant la longueur du côté. Peut-on imaginer la situation inverse ? Comment déterminer la longueur du côté d'un carré en connaissant son aire ?

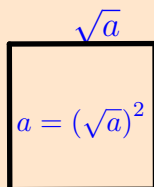


■ DÉFINITION :

Soit a un nombre. On appelle **racine carrée de a** la longueur du côté d'un carré d'aire a .

On note $\sqrt{a}$ la longueur du côté du carré et on obtient :

$$(\sqrt{a})^2 = a$$



Remarque : La racine carrée de a est donc le nombre **positif** qui, élevé au carré, donne a .

L'équation $x^2 = a$ admet deux solutions, et on appelle $\sqrt{a}$ la solution positive à cette équation et l'autre est $-\sqrt{a}$, car $(-\sqrt{a})^2 = a$.

Exemple :

- $\sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{49} = 7$
- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{0,64} = 0,8$
- $\sqrt{0,25} = 0,5$
- $\sqrt{100} = 10$
- $\sqrt{121} = 11$
- $\sqrt{144} = 12$
- $\sqrt{169} = 13$

■ DÉFINITION :

On appelle **carré parfait** un nombre entier dont la racine carrée est un nombre entier.

Remarque : Un carré parfait est donc le carré d'un nombre entier.

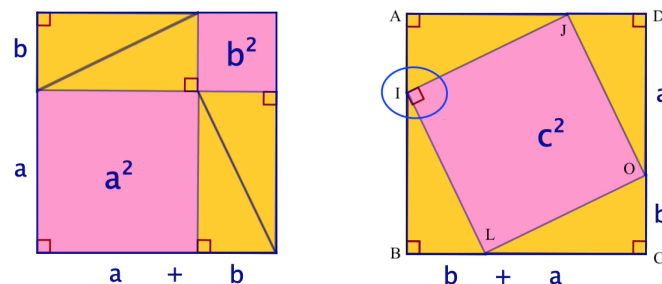
2. Calculer une longueur

Un *théorème* est une propriété qui est démontrée. Cette démonstration résulte de faits mathématiques préalablement établis (les *propriétés*). Un théorème est donc une propriété plus importante, qui se démarque justement par son importance. On a donc deux parties : l'énoncé et la démonstration, de cette propriété fondamentale :

■ THÉORÈME DE PYTHAGORE¹

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

Démonstration. (c'est-à-dire que l'on va expliquer pourquoi l'énoncé est vrai).



Par construction, $JOLI$ est un losange. Dans le triangle AIJ , on sait que $\widehat{IAJ} = 90^\circ$. Or, la somme des angles dans un triangle égale à 180° . Donc $\widehat{IAJ} + \widehat{AIJ} + \widehat{AJI} = 180^\circ$. Donc $90 + \widehat{AIJ} + \widehat{AJI} = 180^\circ$, c'est-à-dire $\widehat{AIJ} + \widehat{AJI} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Or, $\widehat{AJI} = \widehat{BIL}$ Donc $\widehat{AIJ} + \widehat{BIL} = 90^\circ$ (*). On sait que les points A, I et B sont alignés dans cet ordre. Donc $\widehat{AIB} = 180^\circ$. Or, $\widehat{AIB} = \widehat{AIJ} + \widehat{JIL} + \widehat{BIL}$. Donc $\widehat{AIJ} + \widehat{JIL} + \widehat{BIL} = 180^\circ$. Or, d'après (*), $\widehat{AIJ} + \widehat{BIL} = 90^\circ$. Donc $\widehat{JIL} + 90^\circ = 180^\circ$, c'est-à-dire $\widehat{JIL} = 90^\circ$.

On en conclut que $JOLI$ est un losange avec un angle droit.

Donc $JOLI$ est un carré, et ainsi les surfaces roses ont la même aire :

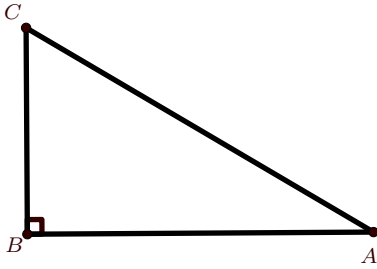
$$c^2 = a^2 + b^2$$

□

1. Grec, environ 580 av. J.-C. - environ 495 av. J.-C.

Exemple :

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $BC = 3$ cm et $AB = 4$ cm.
Déterminer la longueur AC .



On se place dans le triangle ABC rectangle en B .

On sait que $BC = 3$ cm et $AB = 4$ cm.

Or, d'après le théorème de Pythagore,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AC^2 = 16 + 9$$

$$AC^2 = 25$$

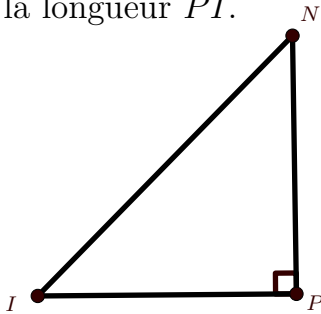
Or AC est une longueur, donc AC est positif.

$$AC = \sqrt{25}$$

$$AC = 5 \quad \text{Donc } AC = 5 \text{ cm.}$$

Exemple :

Soit PIN un triangle rectangle en P tel que $NI = 3,5$ cm et $PN = 2,8$ cm.
Déterminer la longueur PI .



On se place dans le triangle PIN rectangle en P .

On sait que $NI = 3,5$ cm et $PN = 2,8$ cm.

Or, d'après le théorème de Pythagore,

$$NI^2 = PN^2 + PI^2$$

$$3,5^2 = 2,8^2 + PI^2$$

$$PI^2 = 3,5^2 - 2,8^2$$

$$PI^2 = 12,25 - 7,84$$

$$PI^2 = 4,41$$

Or PI est une longueur, donc PI est positif.

$$PI = \sqrt{4,41}$$

$$PI = 2,1 \quad \text{Donc } PI = 2,1 \text{ cm.}$$

3. Montrer qu'un triangle est rectangle

■ RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du côté le plus long est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Exemple :

Le triangle XYZ est tel que $XY = 3,9$ cm, $XZ = 5,2$ cm et $YZ = 6,5$ cm.

Démontrer que le triangle XYZ est rectangle, en précisant le sommet de l'angle droit.

$[YZ]$ est le côté le plus long.

$$\text{D'une part } YZ^2 = 6,5^2 = 42,25.$$

D'autre part

$$XY^2 + XZ^2 = 3,9^2 + 5,2^2 = 15,21 + 27,04 = 42,25.$$

On observe que $YZ^2 = XY^2 + XZ^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle XYZ est rectangle en X .

4. Montrer qu'un triangle n'est pas rectangle

■ CONTRAPOSÉE DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

Si, dans un triangle, la longueur du carré du côté le plus long n'est pas égale à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemple :

Soit DEF un triangle dont les longueurs des trois côtés sont $EF = 4$ cm, $FD = 7$ cm et $DE = 6$ cm. DEF est-il rectangle ?

On observe que le plus grand côté est $[FD]$.

$$\text{D'une part } FD^2 = 7^2 = 49.$$

D'autre part

$$EF^2 + DE^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52.$$

On constate que $FD^2 \neq EF^2 + DE^2$.

Donc, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, DEF n'est pas un triangle rectangle en E .

Méthode : dans quels cas utiliser le théorème de Pythagore ? sa contraposée ? sa réciproque ?

Dans un problème de géométrie, commencer toujours par tracer une figure à main levée (ou en vraie grandeur, si c'est demandé dans l'énoncé).

Quand on cherche la longueur d'un côté

Quand on sait que le triangle est rectangle et que l'on connaît deux longueurs des trois côtés, on peut trouver la longueur du troisième côté.

- Commencer par coder l'angle droit sur la figure, repérer l'hypoténuse.
- On initie le raisonnement.

Modèle de rédaction :

On se place dans le triangle ... rectangle en
On sait que *la longueur du premier côté* est ...
et *la longueur du deuxième côté* est ...

Or, d'après le théorème de Pythagore,

- On écrit l'égalité du théorème, on remplace par les valeurs précisées dans le « On sait que », puis on calcule la valeur recherchée.
On commence par en donner la valeur exacte sous la forme d'une racine carrée, puis on calcule (au besoin) une valeur approchée à la calculatrice **en respectant l'arrondi demandé dans l'énoncé**.
- Avant d'écrire la racine carrée, on n'oublie pas de justifier que, par exemple, « AB est une longueur, donc AB est positif. »

Quand on se demande si un triangle est rectangle

Si on connaît les longueurs des trois côtés d'un triangle, on peut déterminer si le triangle est rectangle ou non.

Attention : On ne peut pas écrire d'égalité des longueurs avant d'avoir fait les calculs « d'une part » et « d'autre part » !

- Commencer par repérer le côté le plus long.
- On initie le raisonnement

Modèle de rédaction :

On remarque que [...] est le côté le plus long.
D'une part $\dots^2 = \dots$
D'autre part, $\dots^2 + \dots^2 = \dots$

— S'il y a égalité :

L'égalité de Pythagore est vérifiée :
 $\dots^2 = \dots^2 + \dots^2$.
Donc triangle est rectangle en

— S'il n'y a pas égalité

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée :
 $\dots^2 \neq \dots^2 + \dots^2$.
Donc triangle n'est pas rectangle.