

Proportionnalité

1. Définitions

■ DÉFINITION : Grandeurs proportionnelles

On dit que deux grandeurs sont **proportionnelles** si on peut calculer chaque valeur de l'une en multipliant ou en divisant la valeur correspondante de l'autre par un même nombre non nul. Ce nombre s'appelle le **coefficient de proportionnalité**.

Exemple :

Voici un tableau de proportionnalité.
Le compléter.

Grandeur A	3,05	0,546	45,9	
Grandeur B	6,405	1,1466		24,612

Pour trouver le coefficient de proportionnalité, je calcule

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \text{ et } \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

Le coefficient de proportionnalité est donc

Ici, on a donc :

■ PROPRIÉTÉ :

Dire que deux grandeurs x et y sont proportionnelles avec k comme coefficient de proportionnalité, signifie que :

Exemple :

Quantité achetée	1	3	6
Prix (cm)	2	6	9

2. Exemples de situations de proportionnalité

A. Prix et quantités

Une barquette de 250 g de fraises coûte 2,80 euros. On sait que le prix à payer est proportionnel à la masse de fraises achetées. Compléter le tableau de proportionnalité ci-dessous et calculer le prix d'une livre, puis d'un kilogramme et demi et enfin de deux kilogrammes de fraises.

Quel est le coefficient de proportionnalité ?

Que représente-t-il ? Écrire y en fonction de x .

B. Échelle d'une carte routière

Une société réalise la carte routière d'un département sur laquelle 1 cm représente une distance de 5 km. Compléter le tableau suivant :

			12		19
		35		17,5	

L'échelle d'une carte routière s'exprime par le quotient :

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

Dans notre exemple, l'échelle de cette carte routière

est $\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$.

C'est un nombre sans unité.

3. Compléter un tableau de proportionnalité

MÉTHODE : Compléter un tableau

- 1) Calculer le coefficient de proportionnalité k (retour à l'unité). On obtient une relation algébrique

$$y = k \times x$$

- 2) Effectuer le produit ou le quotient des valeurs d'une colonne par un même nombre non nul ou additionner ou soustraire les valeurs de plusieurs colonnes entre elles.

- 3) Utiliser des produits en croix.

Soient a , b , c et d quatre nombres relatifs non nuls.

Grandeur A	a	c
Grandeur B	b	d

Dire que ce tableau est un tableau de proportionnalité signifie que

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

Or, d'après l'égalité des produits en croix, cela revient à dire que

$$\dots\dots\dots \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots$$

Exemple :

1)

Temps (min)	3	6	9
Distance (m)	500	1000	

2)

Temps (min)	3	6	9
Distance (m)	500	1000	

3) Quatrième proportionnelle :

4. Représentation graphique

■ PROPRIÉTÉ :

Si deux grandeurs sont proportionnelles et qu'on est ainsi dans une situation de proportionnalité, alors les points de la représentation graphique sont sur une droite qui passe par l'origine du repère.

Remarque : La représentation graphique est donc une **droite qui passe par l'origine du repère**.

■ PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE :

Si les points d'une représentation graphique d'une grandeur en fonction d'une autre sont sur une droite qui passe par l'origine du repère, alors ces deux grandeurs sont proportionnelles et on est ainsi dans une situation de proportionnalité.

Il existe donc un nombre k non nul tel que

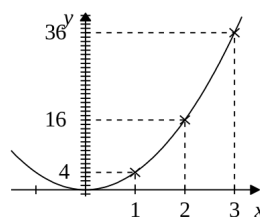
$$y = k \times x$$

où k est le coefficient de proportionnalité.

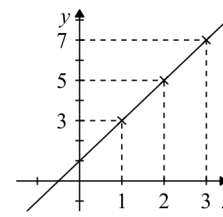
Exemple :

Parmi les représentations graphiques suivantes, lesquelles traduisent une situation de proportionnalité ?

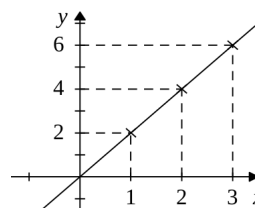
1.



2.



3.



5. Pourcentages

A. Calculer un pourcentage

Exemple :

Un vendeur consent à Julien une réduction de 4 euros sur un DVD qui coûte 16 euros. Quel est le pourcentage de réduction ?

Julien a eu % de réduction, c'est-à-dire,

.....

.....

B. Appliquer un pourcentage

MÉTHODE :

Soient a et t deux nombres. Prendre t % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par $\frac{t}{100}$.

Ainsi, pour trouver t % de a , il faut calculer

$$\frac{t}{100} \times a$$

Remarque : 25 % est le quart, 50 % est la moitié et 20 % est le cinquième, car

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4} ; \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

Exemple :

Chez le même vendeur, Hugo fait 475 euros d'achats. Il demande la même réduction que celle de Julien. Quel sera le montant de la réduction ?

Hugo aura euros de réduction.

C. Augmentation et diminution

Exemple :

Un village compte 550 habitants en 2023. La population augmente de 22 % en 2024. Combien y a-t-il d'habitants en 2024 ?

Il y aura donc habitants en 2024.

■ PROPRIÉTÉ :

- Augmenter une quantité de t % revient à la **multiplier** par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
- Diminuer une quantité de t % revient à la **multiplier** par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

Démonstration.

□

Exemples :

- $a \times 1,20$ revient à effectuer une augmentation de % de a
- $a \times 0,65$ revient à effectuer une diminution de % de a

6. Vitesse, distance et temps

A. Introduction

Dans un mouvement uniforme, il y a proportionnalité entre la distance parcourue et la durée du parcours.

Par l'égalité des produits en croix, on peut également écrire $\frac{v}{1} = \frac{d}{t}$, et donc

En divisant par v (supposé non nul), on obtient la troisième relation fondamentale



Attention

t doit être exprimé par un seul nombre dans une seule unité de durée (secondes, minutes, heures, jours, mois, années...)

B. Conversions d'unités de durée

La dernière remarque du paragraphe précédent est fondamentale.

En effet, 1,2 h est différent de 1 h 2 min et différent de 1 h 20 min.

Dans 1 h 2 min et 1 h 20 min, il y a deux unités différentes. Il faut convertir ces durées en passant à une unique unité. Pour cela, il peut utiliser un tableau de proportionnalité :

Durée (en heure)	1				
Durée (en minutes)	60				

Exemple :

Convertir les durées suivantes en heures, en vous aidant du tableau précédent :

- 2 h 30 min
- 2 h 24 min
- 3 h 36 min
- 1 h 45 min

On est bien parti d'une durée exprimée avec deux unités et arrivé à une durée exprimée dans une seule unité, ce qui est nécessaire.

Remarque : La vitesse est le plus souvent exprimée en km/h, ou $\text{km} \times \text{h}^{-1}$, ou en m/s, ou $\text{m} \times \text{s}^{-1}$. Pour comparer des vitesses, il faut les exprimer dans la même unité.

7. Notion de ratio

■ DÉFINITION :

Soient a , b et c trois nombres.

- On dit que deux nombres a et b **sont dans le ratio 2 : 3** si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$.
- On dit que trois nombres a , b et c **sont dans le ratio 2 : 3 : 4** si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$

Remarque : On peut également voir cela comme une situation de proportionnalité entre les quantités a , b et c . « Il me faut 2 volumes de a pour 3 volumes de b pour 4 volume de c . »

Exemple : (Dosage du béton)

Pour remplir une bétonnière on utilise souvent le ratio suivant : 1 volume de ciment, 2 volumes de sable et 3 de gravier. Les quantités de ciment, sable et gravier sont donc dans le ratio 1 : 2 : 3. Je souhaite utiliser 12m^3 de gravier pour une terrasse, quelle quantité de ciment et de sable dois-je prévoir ?