

Calculs algébriques

1. Nombres relatifs

■ DÉFINITION :

L'**opposé** d'un nombre relatif est le nombre relatif de signe contraire et de même distance à 0.

Exemple :

L'opposé de -3 , 1 est

L'opposé de $\frac{1}{2}$ est

■ PROPRIÉTÉ : Addition (même signe)

Pour calculer la de deux nombres relatifs **ayant les mêmes signes**, on ajoute les distances à 0 et on affecte à ce résultat le même signe que les nombres initiaux.

Exemple :

$$7, 3 + 4 = \dots \quad -9 + (-5) = \dots$$

■ PROPRIÉTÉ : Addition (signes différents)

Pour calculer la de deux nombres relatifs **ayant des signes différents**, on calcule la entre les distances à 0 et on affecte à ce résultat le signe du terme ayant la plus grande distance à 0.

Exemple :

$$-5 + 9 = \dots \quad -14 + 6, 2 = \dots$$

■ PROPRIÉTÉ : Soustraction

Pour trouver la de deux nombres relatifs, on applique la règle suivante :

« Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé »

Exemple :

$$4 - 9 = \dots \quad 10, 8 - (-2, 2) = \dots$$

$$-4 - 9 = \dots \quad -12, 4 - (-12, 4) = \dots$$

■ PROPRIÉTÉ : Multiplication

Pour trouver le de plusieurs nombres relatifs

- On calcule le produit des distances à 0
- On détermine le signe du résultat grâce à la règle des signes.

Le produit de deux nombres est :

- **positif** s'il y a un nombre de nombres négatifs.
- **négatif** s'il y a un nombre de nombres négatifs.

Exemple :

$$A = 2 \times (-3) \times (-2) \times (-5) =$$

$$B = (-10) \times 5 \times (-5) \times 2 =$$

■ PROPRIÉTÉ : Division

Pour trouver le de deux nombres relatifs non nuls, on calcule le quotient des distances à 0 et on détermine le signe grâce à la règle de la multiplication.

Exemple :

$$\begin{array}{l} \frac{6}{2} = \\ \frac{8}{-2} = \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{-35}{7} = \\ \frac{-25}{-5} = \end{array}$$

■ VOCABULAIRE :

Considérons b un nombre relatif non nul.

On appelle *inverse* de b le nombre $\frac{1}{b}$.

Exemple :

- L'inverse de -2 est
- L'inverse de $\frac{1}{3}$ est
- L'inverse de 1 est

■ PROPRIÉTÉ :

« Diviser, c'est multiplier par l'inverse »

Exemple :

$$\frac{-6}{3} =$$

2. Fractions

■ DÉFINITION :

Une **écriture fractionnaire** d'un nombre est de la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont deux nombres relatifs et b est non nul.

Si a et b sont des entiers et b est non nul, on dit que $\frac{a}{b}$ est une **fraction**.

On dit que a est le **numérateur** et b est le **dénominateur**.

■ PROPRIÉTÉ : (admise)

Un quotient ne change pas si on multiplie ou divise son numérateur **et** son dénominateur par le même nombre non nul.

Soient a , b et k trois nombres relatifs avec b et k non nuls. Alors

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemple : (Brevet 2022 - Métropole)

La fraction irréductible égale à $\frac{630}{882}$ est

■ MÉTHODE : Addition et soustraction

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire, on les réduit au même dénominateur, puis on additionne (ou soustrait) les numérateurs, en gardant le dénominateur commun.

Exemple : (Brevet 2022 - Polynésie - septembre)

Calculer $\frac{5}{6} + \frac{7}{8}$ et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

■ MÉTHODE : Multiplications

Pour multiplier deux nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Soient a , b , c et d quatre nombres relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$. Alors

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$



Attention

- On applique la règle des signes de la multiplication.
- Ne pas confondre avec la méthode de l'addition !

Exemple : (Brevet 2022 - Polynésie)

Adriana doit effectuer le calcul suivant

$$-\frac{7}{5} + \frac{6}{5} \times \frac{4}{7}$$

Vrai ou faux ? Le résultat qu'elle obtient sous forme de fraction irréductible est $-\frac{4}{35}$.

■ DÉFINITION :

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit vaut 1.

■ PROPRIÉTÉ :

Soient a et b deux nombres relatifs tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Alors l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Démonstration.

Remarque :

- 0 n'a pas d'inverse
- Un nombre et son inverse ont le même signe.

Exemple :

- L'inverse de 2 est
- L'inverse de $\frac{3}{4}$ est
- L'inverse de $-\frac{5}{7}$ est
- L'inverse de $-\frac{1}{5}$ est



Attention

Ne pas confondre l'inverse et l'opposé !

- L'inverse de 3 est
- L'opposé de 3 est

MÉTHODE : Division

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse.

Si a , b , c et d sont des nombres relatifs tels que b , c et d sont non nuls, alors :

$$\frac{a}{b} = a \div b = a \times \frac{1}{b}$$
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Exemple :

- $\frac{6}{4} \div \frac{9}{8} =$
- $\frac{9}{\frac{10}{30}} =$
- $\frac{9}{\frac{10}{30}} =$

MÉTHODE : Fraction d'une quantité

Calculer une fraction d'une quantité revient à multiplier cette quantité par la fraction.

Exemple :

Luc a lu les $\frac{2}{3}$ d'un livre de 324 pages. Combien a-t-il lu de pages ?

MÉTHODE : Fraction de fraction

- Quand ce ne sont pas des fractions de la même quantité, mais qu'on a des « fractions de fractions » (comme $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{5}$), on multiplie les fractions entre elles.
- Les mots « de » ou « du » se remplacent toujours par le signe $\times$

Exemple :

Dans cette confiture, les $\frac{5}{8}$ du volume total sont constitués de fruits et les pêches représentent les $\frac{3}{5}$ du volume total des fruits.

1. Quelle fraction du volume de confiture représentent les pêches ?
2. Quelle masse de pêches faut-il pour 120 g de confiture ?

3. Puissances

■ **DÉFINITION** : Puissance d'exposant positif
Soient a un nombre non nul et n un entier strictement positif, on note a^n et on lit « a **puissance** n » l'entier obtenu comme produit de n fois le nombre a . Donc

■ DÉFINITION :

L'entier n s'appelle l'**exposant** de a^n .

Exemple :

- $2^5 =$
- $(-5)^3 =$

L'écriture a^0 n'a *a priori* pas de sens, puisqu'on ne peut multiplier a par lui-même zéro fois.

Cependant, si on veut lui donner un sens on pose :

Pour tout nombre a non nul,

.....

■ **DÉFINITION** : Puissance d'exposant négatif
Soient a un nombre non nul et n un entier strictement positif. Le nombre a^{-n} est l'**inverse** du nombre a^n , c'est-à-dire

Exemple :

- $10^{-3} =$
- $3^{-4} =$

Remarque : Voici quelques valeurs particulières :

- $a^1 = a$ pour tout nombre a .
- $a^0 = 1$ pour tout nombre a non nul.
- $0^n = 0$ pour tout nombre entier n non nul.
- $1^n = 1$ pour tout nombre entier n .

■ RÈGLE : Priorités opératoires

Dans une expression sans parenthèses comportant des puissances, on effectue d'abord les puissances, puis les multiplications et les divisions, et enfin les additions et les soustractions.

Remarque : La puissance d'un nombre négatif s'écrit avec des parenthèses :

$$(-2)^4 = 16 \text{ mais } -2^4 = -16.$$

■ DÉFINITION : Notation scientifique

La **notation scientifique** (ou **écriture scientifique**) d'un nombre décimal positif est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$ où :

- a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$
- n est un entier relatif, c'est-à-dire positif ou négatif.

Remarque : Le nombre a contient un seul chiffre non nul avant la virgule.

Exemple :

- La distance de la Terre au Soleil est d'environ 150 000 000 km, c'est-à-dire, en notation scientifique :
- La taille du virus de la grippe est d'environ 0,000 000 09 m, c'est-à-dire, en notation scientifique :

Pour faciliter la lecture, on peut utiliser des **préfixes multiplicateurs** avec les unités :

Pour les grands nombres :

Préfixe	Symbole	Puissance
déca		10^1
hecto		10^2
kilo		10^3
méga		10^6
giga		10^9

Exemple :

- 1 kg = g = g.
- 2 hm = m = m.
- 50 MW = W = W.

Pour les petits nombres :

Préfixe	Symbole	Puissance
déci		10^{-1}
centi		10^{-2}
milli		10^{-3}
micro		10^{-6}
nano		10^{-9}

Exemple :

- 50 cL = L = L.
- 38 nm =