

Contrôle n° 5 : Systèmes d'équations

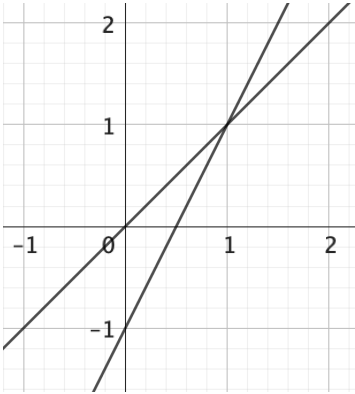
• • Jeudi 28 mars 2024 • •

Nom :
Prénom :
Classe : 2^{nde} ES

La calculatrice est autorisée.

Exercice n° 1 : QCM (3 points)

Pour chacune des propositions suivantes, entourer la (ou les) bonne(s) réponse(s) (sans justification).
Toute bonne réponse rapporte un point. Toute mauvaise réponse retire un demi-point.

Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Soit le système $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$ Quel est le couple solution parmi les suivants ?	$(-1 ; 2)$	$(2 ; 2)$	$(4 ; 1)$	$(-2 ; -1)$
Le système $\begin{cases} y = 0,5x - 3 \\ 1,75x - 3,5y = 10,5 \end{cases} \dots$	n'a pas de couple solution	a un unique couple solution	a exactement deux couples solutions	a une infinité de couples solutions
Dans le graphique ci-dessous, on a tracé les droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.  Le système $\begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases} \dots$	n'a pas de solution	admet un unique couple solution : $(1 ; 1)$	admet deux solutions : 1 et 1	admet une infinité de solutions

Première question : D Deuxième question : D Troisième question : B

Exercice n° 2 : Vrai ou Faux (3 points)

Les questions suivantes sont indépendantes. Entourer directement la réponse, sans justifier.

1. Pour tout a réel, le système $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - a^2y = 7 \end{cases}$ a un unique couple solution. Vrai ? Faux ?

Dire que la proposition précédente est vraie, c'est dire que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, le déterminant du système précédent est non nul.

Le déterminant du système est $2 \times (-a^2) - 1 \times 3 = -2a^2 - 3$.

Or, $-2a^2 - 3 = 0 \iff a^2 = -\frac{3}{2}$, ce qui est impossible. En effet, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geq 0$.

Donc le déterminant du système n'est jamais nul (pour tout $a \in \mathbb{R}$), ainsi la proposition précédente est **vraie**.

2. Si les deux droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = cx + d$ sont sécantes, alors leur point d'intersection I est le même que celui des droites d'équations $y = 2ax + 2b$ et $y = 2cx + 2d$.

Vrai ? Faux ?

La proposition est **fausse**. Donnons un contre-exemple dans le cas où $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$ et

$d = 1$. Considérons donc le système $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$

Ce système admet évidemment comme solution le couple $(0 ; 1)$. Donc les droites d'équations $y = x + 1$ et $y = -x + 1$ sont sécantes en $I(0 ; 1)$.

Alors que le système $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$ admet comme solution $(0 ; 2)$, les droite d'équations $y = 2x + 2$ et $y = -2x + 2$ sont sécantes en $J(0 ; 2)$, et $I \neq J$.

Exercice n° 3 : Application du cours (5 points)

Déterminer le nombre de solutions de chacun des systèmes suivants et résoudre si possible.
Toutes les étapes de résolution doivent figurer sur la copie.

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

Résolution de $\mathcal{S}_1$

Déterminons le nombre de solutions de $\mathcal{S}_1$:

$2 \times 3 - 4 \times 1 = 6 - 4 = 2$, donc le système admet une unique solution.

On multiplie la deuxième ligne du système par 2,

et on obtient
$$\begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

Puis on soustrait la deuxième ligne à la première, pour obtenir $-y = -11$, donc $y = 11$.

On remplace dans la première équation, et donc $2x + 11 = -1$, donc $2x = -12$, donc $x = -6$.

Ainsi $\mathcal{S} = \{(-6 ; 11)\}$.

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ -6x + 10y = -10 \end{cases}$$

Résolution de $\mathcal{S}_2$

Déterminons le nombre de solutions de $\mathcal{S}_2$:

$3 \times 10 - (-6) \times (-5) = 30 - 30 = 0$, donc le système admet une infinité de solution ou aucune solution.

En multipliant la première ligne du système par

-2 , on obtient le système
$$\begin{cases} -6x + 10y = -10 \\ -6x + 10y = -10 \end{cases}$$

Donc le système $\mathcal{S}_2$ admet une infinité de solutions.

Exercice n° 4 : Problème concret (4 points)

À la médiathèque, cinquante livres sont rangés côte à côte sur un rayon de la bibliothèque. Ces livres sont des romans de 5 cm d'épaisseur et des bandes dessinées (BD) de 2,5 cm d'épaisseur. Ils occupent en tout 2 m de long.

1. Écrire le système permettant de trouver le nombre de romans et le nombre de BD.

Soit r le nombre de romans et b le nombre de bandes-dessinées.

Il y a cinquante livres, donc $r + b = 50$.

De plus, avec les informations sur la taille des livres, on obtient $5r + 2,5b = 200$ (où 2 m = 200 cm).

D'où le système

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} r + b &= 50 \\ 5r + 2,5b &= 200 \end{cases}$$

2. Résoudre ce système.

On multiplie la première ligne par 5 et on obtient le système

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 5r + 5b &= 250 \\ 5r + 2,5b &= 200 \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième ligne à la première, $2,5b = 50$, donc $b = \frac{50}{2,5} = 20$.

On remplace dans la première équation $r + b = 50$, on obtient $r + 20 = 50$, c'est-à-dire $r = 30$.

Ainsi l'unique couple solution de système est $(30 ; 20)$; il y a 30 romans et 20 bandes-dessinées.

Exercice n° 5 : Interpolation de Lagrange (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des réels. La représentation graphique de f est une parabole qui passe par les points $A(1 ; 2)$, $B(2 ; -3)$ et $C(3 ; -12)$

1. Écrire un système vérifié par a , b et c .

En remplaçant les valeurs de x et $f(x)$ pour $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$ dans l'expression de la fonction f , on obtient

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = -3 \\ f(3) = -12 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire } (\mathcal{S}) \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = -3 \\ 9a + 3b + c = -12 \end{cases}$$

2. Résoudre ce système et donner alors l'expression de la fonction f .

Le système admet un unique triplet solution, qui est $(-2 ; 1 ; 3)$.

La fonction cherchée est donc la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = -2x^2 + x + 3$

Bonus

Trouver un nombre de trois chiffres sachant que :

1. La somme de ses chiffres est égale à 14.
2. En échangeant le chiffre des unités et celui des dizaines, ce nombre augmente de 36.
3. En échangeant le chiffre des unités et celui des centaines, ce nombre augmente de 297.

On note $\overline{abc}$ pour le nombre cherché, c'est-à-dire que le nombre est écrit avec le chiffre a , le chiffre b et le chiffre c . En le décomposant, on obtient $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

En transformant les informations de l'énoncé en système, on obtient

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a + b + c = 14 \\ 100a + b + 10c = 100a + 10b + c + 36 \\ a + 10b + 100c = 100a + 10b + c + 297 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a + b + c = 14 \\ -9b + 9c = 36 \\ -99a + 99c = 297 \end{cases}$$

Ce système a pour solution le triplet $(4 ; 3 ; 7)$.

Ainsi le nombre cherché est le nombre 437.