

Devoir en temps libre n° 1 :

Chapitres 1 et 2

• • Pour le lundi 6 novembre 2023 • •

Partie 1 : Calculs

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x+1}$.

1) Montrer que, pour tout $x \neq -1$, on a : $f(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{x+1}$.

2) Effectuer les calculs d'images suivants. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

a) $f\left(\frac{2}{3}\right)$;

b) $f(\sqrt{5})$;

c) $f(\sqrt{3}-1)$.

Exercice 2 :

Sans utiliser la calculatrice, écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ ou $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ le plus petit possible.

a) $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$;

b) $B = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right)$;

c) $C = \frac{\frac{3}{2} - \frac{7}{5}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + 1}$.

d) $D = \sqrt{48}$;

e) $E = \sqrt{36+64}$;

f) $F = 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48}$;

g) $G = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{25}}$.

Exercice 3 :

Calculer sans calculatrice et simplifier les expressions suivantes :

a) $A = \frac{a^2(-a)^3(-b^2)b^5a}{(-b)^4a^5(ab)^2}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$;

b) $B = \frac{16^{25}}{2^{100}}$;

c) $C = \frac{a^2+ab}{b^2+ab}$ avec $b^2+ab \neq 0$;

d) $D = \sqrt{2^6(1+2^3)}$;

e) $E = \frac{\frac{1}{1-\pi} - \frac{1}{1+\pi}}{1 + \frac{1}{\pi^2-1}}$.

Exercice 4 :

Écrire sans radical au dénominateur et simplifier les expressions suivantes :

a) $A = \frac{3}{\sqrt{5}+1}$;

b) $B = \frac{-2}{\sqrt{7}-2}$;

c) $C = \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$;

d) $D = \frac{6-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}$.

Partie 2 : Autour de l'ensemble des nombres décimaux

Regroupement des nombres

1) Rappeler les quatre ensembles de nombres auxquels appartiennent les nombres connus.



Définition

On appelle **nombre décimal** tout nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

- 2)
 - a) Un nombre décimal est-il un nombre entier relatif ? Expliquer pourquoi.
 - b) Un nombre entier relatif est-il un nombre décimal ? Expliquer pourquoi.
 - c) Un nombre décimal est-il un nombre rationnel ? Expliquer pourquoi.
 - d) Un nombre rationnel est-il un nombre décimal ? Expliquer pourquoi.
 - e) Écrire, comme dans le cours, une suite d'inclusions entre $\mathbb{D}$ et les quatre ensembles de la première question.

Nombres rationnels / nombres décimaux

Propriété

Tout nombre réel admet au moins un développement décimal. Si une partie de ce développement se répète, on la souligne. Par exemple :

$$1 = 1, \underline{0}... \text{ et } \frac{2}{21} = 0,09\underline{52380}...$$

3.
 - a) Donner le développement décimal de $\frac{1}{3}$.
 - b) Calculer $3 \times 0, \underline{3}...$
 - c) En déduire que $0, \underline{9}... = 1$

Nous venons de montrer qu'il existe des nombres réels qui ont deux développements décimaux.

4.
 - a) En posant la division de 5 par 7, trouver le développement décimal de $\frac{5}{7}$.
 - b) Expliquer pourquoi le développement décimal de $\frac{8}{13}$ se termine par une séquence d'au plus 13 chiffres qui se répètent à l'infini.

Le but de la question précédente est de comprendre la propriété suivante :

Propriété

Caractérisation des nombres rationnels : les nombres rationnels sont les nombres dont le développement décimal a des chiffres qui finissent par se répéter.

Il reste à prouver que les nombres dont le développement décimal a des chiffres qui finissent par se répéter sont bien des nombres rationnels.

5.
 - a) Trouver, à l'aide de la calculatrice, les développements décimaux de $\frac{5}{9}$, $\frac{12}{99}$ et $\frac{456}{999}$.
 - b) Considérons par exemple le nombre $x = 0, \underline{48}$
 - 1) Quelle est la valeur de $100x - 48$?
 - 2) Écrire l'équation obtenue grâce à la question précédente.
 - 3) En résolvant l'équation précédente, montrer que x est un nombre rationnel.
 - 4) En déduire que le nombre $y = 146, \underline{5248}...$ est aussi un nombre rationnel.
6. Il existe des nombres dont la partie décimale ne se répète jamais : ces nombres ne sont pas rationnels. Expliquer une méthode pour obtenir un tel nombre. On attend dans votre réponse une méthode pour « construire » un tel nombre réel.