

Logarithmes 1 : Exercices

Exercice 1 Evaluer sans calculatrice les nombres suivants (par convention, quand on écrit « $\log(x)$ », il s'agit du logarithme en base 10).

- a) $\log(1)$ b) $\log(10^7)$ c) $\log\left(\frac{1}{10}\right)$ d) $\log(\sqrt[3]{100})$
 e) $\log\left(\frac{1}{\sqrt[4]{10}}\right)$ f) $\log(-10)$ g) comment se comporte $\log(x)$ quand x tend vers 0 ?

Exercice 2 Evaluer sans calculatrice les nombres suivants :

- a) $\log_2(1)$ b) $\log_2(64)$ c) $\log_3(729)$ d) $\log_9(729)$ e) $\log_3(\sqrt[4]{27})$
 f) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$ g) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ h) $\log_2\left(\frac{1}{128}\right)$ i) $\log_{16}(2)$ j) $\log_9\left(\frac{1}{3}\right)$
 h) $\log_5(625)$ l) $\log_{\frac{1}{4}}(4)$ m) $\log_{\frac{1}{4}}(2)$

Exercice 3 Ecrire les expressions suivantes sous la forme $m \cdot \log(a) + n \cdot \log(b)$:

- a) $\log(a^2b^3)$ b) $\log\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$ c) $\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{b^2\sqrt[3]{ab}}\right)$ d) $\log(a^2b) - \log\left(\frac{a}{b^2}\right)$

Exercice 4 Evaluer sans calculatrice les nombres suivants :

- a) $\log_5(1)$ b) $\log_5(25)$ c) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$ d) $\log_3(81)$ e) $\log_{\sqrt{3}}(9)$
 f) $\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{27})$ g) $\log_7(\sqrt{49})$

Exercice 5 Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \log(100) + 2 \cdot \log(0,01) \qquad B = \log_2(16) - \log_2 128 + \log_2 \sqrt{8} + \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C = \log_3(0,3) + \log_3(81) + \log_3(100) \qquad D = \log_5(50) - \log_5(6250)$$

Exercice 6

- a) Evaluer sur calculatrice les nombres suivants : $\log(1270)$, $\log(127)$, $\log(12,7)$, $\log(1,27)$ et $\log(0,127)$.
 b) Que constate-t-on ?
 c) Expliquer cette observation par une règle de calcul.

Exercice 7 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ en précisant d'abord l'ensemble de définition de l'équation.

- a.** $\log(x+1) - \log(3) = \log(2x-3) + \log(7)$
b. $\log_3(2x-5) + \log_3(3x+7) = 4\log_3(2)$
c. $\ln(x^2-7) = 2\ln(x+3)$
d. $\log(\sqrt{x+1}) + \log(\sqrt{x-1}) - \log(5) = 0$
e. $\log(x^2+3x-1) = 2$

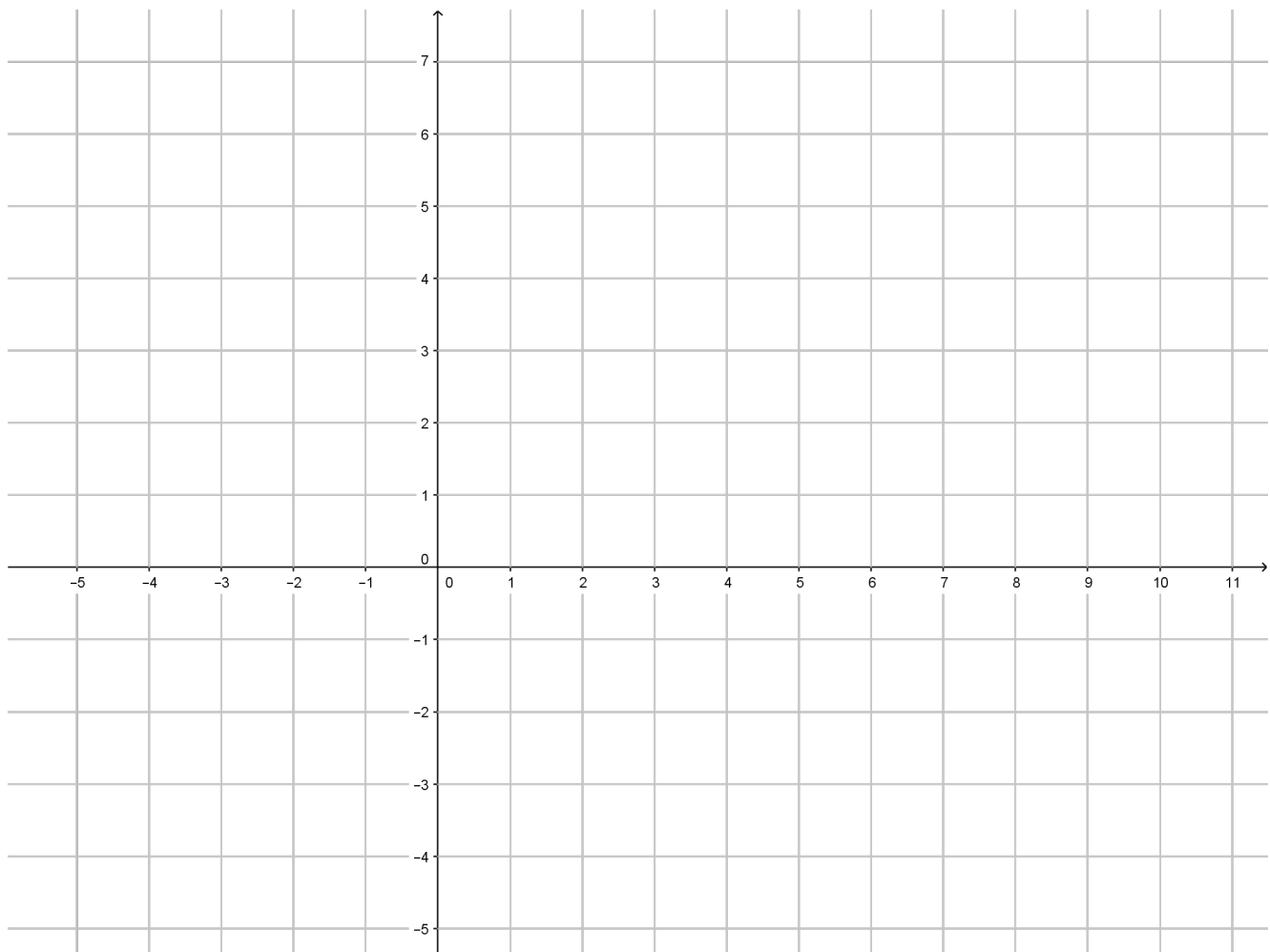
Exercice 8 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

- a) $2^{x^2} = 512$ b) $7^{x^2+x} = 49$ c) $\frac{1}{10^x} = 10000$ d) $3^{x^2-x} = 729$ e) $2^{3x} = 13$
 f) $4 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 1 = 0$

Exercice 9 Résoudre les systèmes suivants

- a) $\begin{cases} \log(x) + \log(y) = 2 \\ x + y = 25 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log(x) - \log(y) = 1 \\ xy = 10 \end{cases}$

Exercice 10 Construire les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto 3^x$ et $g : x \mapsto \log_3(x)$



Exercice 11

1) On suppose $x > 0$. Faire apparaître $\log(x)$ dans les expressions suivantes :

- | | | | |
|--|--------------------------------------|---|--|
| a) $\log\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ | b) $\log(x^2)$ | c) $\log(3x)$ | d) $\log\left(\sqrt[3]{\frac{x}{27}}\right)$ |
| e) $\log\left(\frac{6}{x}\right)$ | f) $\log\left(\frac{5x^2}{3}\right)$ | g) $\log\left(\frac{\pi}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$ | h) $\log\left(\sqrt{\frac{16}{x}}\right)$ |

2) On suppose $x > 0$. Mettre les expressions suivantes sous la forme $\log(f(x))$ où f est une fonction de x :

- | | | |
|-----------------------|------------------------------------|--|
| a) $\log(x) + \log 3$ | b) $\log(x + 2) + 5$ | c) $\frac{1}{2}\log(3x) - 2.\log(x) + 1$ |
| d) $\log(x - 1) - 4$ | b) $\log(x) + \log(2x) + \log(3x)$ | c) $2.\log(3x)$ |

Logarithmes 2 : Applications pratiques

Exercice 5.16

La *chronologie glossienne* est une méthode permettant de dater un langage, fondée sur une théorie selon laquelle, durant une longue période, les changements linguistiques prennent place à un taux constant.

Supposons qu'un langage ait à l'origine N_0 mots de base et qu'au temps t , mesuré en millénaires, le nombre $N(t)$ de mots de base qui restent dans le langage courant est donné par :

$$N(t) = N_0 \cdot 0.805^t$$

- Donnez approximativement le pourcentage de mots de base perdus tous les cent ans.
- Si $N_0 = 200$, représentez le graphique de N pour $0 \leq t \leq 20$.
- Combien d'années faudra-t-il pour que $3/4$ des mots disparaissent ?

Exercice 5.18

La *loi de Beer-Lambert* stipule que la quantité de lumière I qui pénètre à une profondeur de x mètres dans l'océan est donnée par :

$$I = I_0 \cdot c^x$$

avec $0 < c < 1$ et où I_0 est la quantité de lumière à la surface.

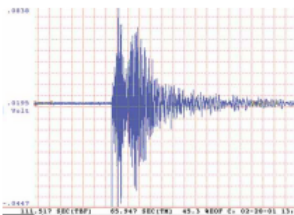
- Exprimez x en fonction de logarithmes décimaux.
- Si $c = 0.25$, calculez la profondeur à laquelle $I = 0.01I_0$ (cela détermine la zone où la photosynthèse peut avoir lieu).

Exercice 5.19

Sur l'*échelle de Richter*, la magnitude R d'un tremblement de terre d'intensité I est donnée par la relation :

$$R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

I_0 étant une intensité minimale donnée.



- Si l'intensité d'un tremblement de terre est $1000 \cdot I_0$, calculez R .
- Exprimez I en fonction de I_0 et R .
- Les plus grandes magnitudes de séismes enregistrées se sont situées entre 8 et 9 sur l'échelle de Richter. Calculez les intensités correspondantes en fonction de I_0 .
- Au centre des États-Unis, l'aire A (en m^2) touchée par un séisme est liée à la magnitude par la formule $R = 2.3 \log(A + 14'000) - 6.6$. Calculez l'aire de la région touchée pour une magnitude 4.
- Le nombre annuel moyen n de séismes qui ont une magnitude entre R et $R+1$ vérifie plus ou moins la formule $\log(n) = 7.7 - 0.9R$. Combien y a-t-il en une année de séismes de magnitude comprise entre 4 et 5 ?

Exercice 5.20

En septembre 1983, le plus grand nombre premier connu était $2^{132'049} - 1$. Combien ce nombre a-t-il de chiffres ?

Les Décibels

La grandeur qui permet de caractériser la « force d'un bruit » est **l'intensité sonore** notée I exprimée en W.m^{-2} (watt par mètre carré).

Plus un son est fort plus son intensité sonore est forte.

Il existe une intensité sonore minimale sous laquelle on n'entend pas le son ; c'est **le seuil d'audibilité**. Il vaut $I_0 = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$.

Il existe aussi **un seuil de douleur**, palier au-delà duquel un son crée une douleur et endommage fortement voire irrémédiablement le système auditif. L'intensité sonore associée vaut $I_{\text{douleur}} = 10 \text{ W.m}^{-2}$.

On se rend donc compte que les intensités sonores des bruits quotidiens peuvent s'étendre de $1,0 \cdot 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ jusqu'à 10 W.m^{-2} . Ce domaine est beaucoup trop étendu pour se rendre compte des différentes valeurs : le seuil de douleur est 10^{13} fois plus fort que le seuil d'audibilité !!

Calcul : $\frac{10}{1,0 \cdot 10^{-12}} = 10^{13}$

Pour réduire ce domaine de valeurs on a alors créé une nouvelle grandeur : **le niveau d'intensité sonore L** (L pour « Level » in english) exprimé en **décibel (dB)** et qui se calcule par la formule suivante :

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

avec : - L le niveau d'intensité sonore (dB)
- I l'intensité sonore de la source sonore (W.m^{-2})
- I_0 le seuil d'audibilité ($I_0 = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$)

Calculons alors le niveau d'intensité sonore pour le seuil d'audibilité I_0 :

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I_0}{I_0}\right) = 10 \cdot \log(1) = 0 \text{ dB}$$

On peut ensuite calculer le niveau d'intensité sonore pour le seuil de douleur :

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I_{\text{douleur}}}{I_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{10}{1,0 \cdot 10^{-12}}\right) = 140 \text{ dB}$$

Les valeurs des niveaux sonores ne s'étendent plus que sur un domaine allant de 0 à 140 dB !

Nettement plus pratique.

Niveau d'intensité sonore (dB)		Intensité sonore (W.m^{-2})	
140		10^2	Ariane au décollage
120	douloureux	1	passage d'une F1
100	dangereux	10^{-2}	marteau piqueur
80	fatigant	10^{-4}	restaurant scolaire
60	gênant	10^{-6}	conversation normale
40		10^{-8}	séjour calme
20	reposant	10^{-10}	désert
0		10^{-12}	seuil d'audibilité

1) Calculer le niveau d'intensité sonore d'une source d'intensité sonore 10^{-5} W.m^{-2} .

2) Calculer l'intensité sonore I d'un instrument de musique qui émet une note de niveau d'intensité sonore $L=60 \text{ dB}$.

3) On considère 4 instruments qui émettent, chacun SEUL, une note de niveau d'intensité sonore $L = 60 \text{ dB}$. Quel sera le niveau d'intensité sonore si les 4 instruments jouent ensemble ? Attention, les niveaux sonores ne s'ajoutent, seules les intensités sonores s'ajoutent!

4) Montrer que si l'intensité sonore d'une source double, le niveau d'intensité sonore augmente de 3 dB.

Logarithmes 3 : Exercices

Exercice 1 :

Avec une inflation constante de 11% par an, en combien d'années les prix doublent-ils ?

En combien de temps le prix du beurre (3 € actuellement) atteint-il 10 € ?

Un article est vendu aujourd'hui 1,80 €. Quand valait-il 1 € (combien d'années en arrière) ?

Exercice 2 :

En 2020, un pays a fabriqué un million de bicyclettes pour sa consommation intérieure, et 250 000 pour l'exportation. Depuis lors, les augmentations annuelles de demandes sont, en moyenne de 12% pour la consommation intérieure et de 44% pour l'exportation.

a) Calculer le nombre de bicyclettes qu'il faut produire en 2025 pour satisfaire la demande.

b) Au bout de combien d'années, les exportations dépassent-elles la consommation intérieure ?

Exercice 3 :

La raréfaction d'une matière première oblige un pays à envisager d'en diminuer la consommation de 8 % par an. Celle-ci était, en 2009, de 100 millions de tonnes.

a) En quelle année la consommation sera-t-elle, pour la 1^{ère} fois, inférieure à 1 million de tonnes ?

b) Quel devrait être le pourcentage de diminution annuelle imposé pour atteindre une consommation annuelle égale à 1 au bout de 20 ans ? ?

Exercice 4 : (valeurs fictives)

La population du Costa Rica double tous les 18 ans.

Actuellement, il y a 2 millions d'habitants au Costa Rica.

La population de la Bolivie est de 6 millions d'habitants, celle de la Turquie de 40 millions, et leurs populations doublent tous les 27 ans.

a) Quel est le taux de variation annuel du Costa Rica ? Que vaudra-t-il dans 10 ans ?

b) Calculer le taux de variation annuel de la Bolivie et de la Turquie ?

c) Dans combien d'années la population du Costa Rica rattrapera-t-elle celle de la Bolivie ?

d) Dans combien d'années la population du Costa Rica rattrapera-t-elle celle de la Turquie ?

Exercice 5 :

Le prix de beefsteak augmente de 2,5% par an. Le salaire horaire d'un employé de banque augmente de 1,4% par an.

Actuellement, cet employé travaille une demi-heure pour payer un bon beefsteak.

a) Dans combien de temps lui faudra-t-il travailler 1 heure pour payer ce même beefsteak ?

b) Dans combien de temps lui faudra-t-il travailler 2 heures pour payer ce même beefsteak ?

Exercice 6 :

a) La consommation de pétrole d'un pays augmente régulièrement de 10% par an.

Au bout de combien d'années la consommation de ce pays atteindra-t-elle le double de la consommation actuelle ?

b) La consommation actuelle est de 100 millions de tonnes. Si la consommation se met à baisser de 2% par an, dans combien d'années repassera-t-elle sous la barre des 60 millions de tonnes ?

Exercice 7 :

L'iode 128, radioactif, a une période de 25 minutes (c'est-à-dire qu'il perd la moitié de sa masse pendant cette période).

A des fins d'analyses médicales, un cobaye en absorbe 12 mg.

a) Calculer le taux de variation par minute ?

b) Combien de temps faut-il attendre pour que son corps n'en contienne plus que des traces infimes, inférieures à 1 mg ?

Logarithmes 4 : Exercices

□ Exercice 3-10

Sans utiliser la calculatrice, déterminez

$$a = \log_5(50) + \log_5(0.2) + \log_5(2.5)$$

$$b = \log_3\left(\sqrt[3]{3}\right) + \log_3(27) + \log_3\left(\frac{5}{3}\right) + \log_3\left(\frac{8}{5}\right) + \log_3\left(\left(\frac{9}{2}\right)^3\right)$$

Sans utiliser la calculatrice, calculer

□ Exercice 3-13

Dans un livre d'informatique, on a trouvé la formule

$$n \mapsto d(n) = k n \log_2(n) \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

- a) Récrivez cette formule en utilisant le logarithme décimal.

□ Exercice 4-3

Résolvez les équations suivantes

a) $\log_4(x) = 3$

b) $\log_x(81) = 4$

c) $\log_x(289) = 2$

d) $2^x 3^x = 1.4$

e) $\log(2x) = -3.4$

□ Exercice 4-4

Résolvez les équations suivantes

a) $7^x = 3$

b) $0.7^y = \frac{1}{40}$

c) $\left(10^{5-x}\right)^{3-x} = 100$

□ Exercice 4-5

Résolvez les équations suivantes

a) $\log\left(\frac{5x}{4}\right) = 2.35$

b) $3.4^x = 5.2$

c) $\frac{2^x}{3^x} = 4.5$

d) $\ln(1 - 2x) = -2.4$

e) $\ln(3x^3) = 4.8$

□ Exercice 4-6

La population d'une ville est de 15×000 habitants. Elle augmente régulièrement de 2 % par an. Dans combien d'années aura-t-elle triplé ?

□ Exercice 4-17

Résolvez les équations suivantes

a) $\log(x+1) + \log(3) = \log(2x-3) + \log(7)$

b) $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln(18)$

c) $\ln(x^2 - 7) = 2 \ln(x+3)$

d) $\ln(\sqrt{x+1}) + \ln(\sqrt{x-1}) = \ln(5)$

e) $(\ln x)^2 = \ln(x^2)$

f) $(\log(x))^2 - 5 \log(x) + 4 = 0$

g) $2^x = \sqrt[3]{512}$

h) $\frac{3^x}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt{27}$

Logarithmes 5 : le logarithme naturel (ln)

□ Exercice 3-4

En calculant sur votre calculatrice quelques valeurs de la fonction $x \mapsto e^x$, dessinez le graphique du logarithme naturel

$$x \mapsto \ln(x)$$

□ Exercice 3-5

Récrivez les propriétés du logarithme (voir Cours § 3.4) pour le cas particulier du logarithme naturel.

□ Exercice 3-6 (par oral)

a) Avec votre calculatrice, essayez de calculer

$$\begin{array}{cccc} e^{-1} & \ln(-1) & \ln(e^\pi) & e^{\ln(\pi)} \\ e^{1200} & e^{-1200} & \ln(e^{1200}) & \ln(e^{-1200}) \end{array}$$

puis expliquez et commentez les résultats obtenus.

b) En contournant la difficulté, comment peut-on calculer $\ln(e^{1200})$ et $\ln(e^{-1200})$?

□ Exercice 3-7

a) Faites apparaître $\ln(x)$ dans les expressions suivantes (sous l'hypothèse $x > 0$)

$$\begin{array}{ccc} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \ln(x^2) & \ln(3 \cdot x) \\ \ln\left(\sqrt[3]{\frac{x}{27}}\right) & & \end{array}$$

b) Sous l'hypothèse $x > 0$, mettez les expressions suivantes sous la forme $\ln(u(x))$

$$\ln(x) + \ln(3) \qquad \ln(x+2) + 5 \qquad \frac{1}{2} \cdot \ln(3 \cdot x) - 2 \cdot \ln(x) + 1$$