

Racines et logarithmes

1. Racines n -ièmes

A. Définition

■ DÉFINITION :

Soit x un nombre réel positif et n un nombre entier non nul. La racine n -ième du nombre réel x , notée $\sqrt[n]{x}$, est le nombre réel défini par

$$y = \sqrt[n]{x} \text{}$$

■ DÉFINITION :

Dans l'expression $\sqrt[n]{x}$, le symbole $\sqrt[n]{}$ est le , l'entier n est l' et x est le

Remarque : On dit dans le cas où $n = 2$ et au lieu de racine troisième dans le cas où $n = 3$.

Remarque : Il découle de la définition que, pour tout réel x positif,

$$(\sqrt[n]{x})^n = \text{.....} = \text{.....}$$

Remarque : Le symbole $\sqrt{}$ fut introduit par Christoff Rudolff¹ (déformation de la lettre r , initiale du mot latin *racina*) dans son ouvrage « Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeincklich die Coss genent werden », imprimé en 1525 à Strasbourg. Il a introduit le signe moderne du radical sans la barre supérieure (vinculum). C'est le mathématicien René Descartes qui ajouta la barre horizontale au symbole de Christoff dans son ouvrage La Géométrie, publié en 1637.

Exemples

- $\sqrt[4]{81} = \text{.....}$ car
- $\sqrt[5]{32} = \text{.....}$ car
- Quel que soit $n \geq 2$, $\sqrt[n]{0} = \text{.....}$ car
- Quel que soit $n \geq 2$, $\sqrt[n]{1} = \text{.....}$ car
- $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \text{.....}$ car
- $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} = \text{.....}$ car
- $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \text{.....}$ car
- $\sqrt[4]{\frac{16}{125}} = \text{.....}$ car

B. Extensions de la définition

Si l'entier n est pair, alors pour tout x réel, x^n est positif. Par conséquent, il n'est pas possible de définir la racine n -ième d'un réel négatif pour un indice pair. En revanche, si n est impair et x négatif, alors x^n est négatif. Donc on peut définir la racine n -ième d'un nombre négatif quand n est impair.

■ DÉFINITION :

Soit x un nombre réel négatif et n un entier impair. Alors

$$\sqrt[n]{x} = \text{.....}$$

Exemples

- $\sqrt[3]{-1} = \text{.....}$
- $\sqrt[7]{-128} = \text{.....}$
- $\sqrt[3]{-125} = \text{.....}$
- $\sqrt[4]{-16} = \text{.....}$

Remarque : Il résulte des définitions précédentes les deux égalités suivantes :

$$\sqrt[n]{x^n} = |x| \text{ si } n \text{ est pair et } \sqrt[n]{x^n} = x \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Exemples

- $\sqrt[6]{5^6} = \text{.....}$
- $\sqrt[4]{(-3)^4} = \text{.....}$
- $\sqrt[5]{7^5} = \text{.....}$
- $\sqrt[9]{(-4)^9} = \text{.....}$

■ PROPRIÉTÉ :

On considère l'équation $x^n = k$ où k est un réel et n un entier non nul. On distingue trois cas pour la résolution de cette équation :

- Si $k \geq 0$ et que n est pair, alors $\mathcal{S} = \{\pm \sqrt[n]{k}\}$
- Si $k < 0$,
 - Si n est pair, $\mathcal{S} = \emptyset$
 - Si n est impair, $\mathcal{S} = \{\sqrt[n]{k}\}$

Exemple

- $x^4 = 16$. Alors
- $x^4 = -1$. Alors
- $x^5 = -32$. Alors
- $x^6 = 17$. Alors
- $x^7 = -19$. Alors
- $x^8 = -8$. Alors

1. Christoff Rudolff est un mathématicien allemand né en 1499 à Jawor (Pologne) et mort en 1545 à Vienne (Autriche).

C. Propriétés de calculs

Dans toute cette partie, on considère a et b des réels positifs et n , p et q des entiers non nuls.

■ PROPRIÉTÉ :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b} \quad (1)$$

Exemples

- $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{8} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt[3]{8a^6b^9} = \dots\dots\dots$

■ PROPRIÉTÉ :

Si b est non nul,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (2)$$

Exemples

- $\sqrt[3]{\frac{1000}{27}} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}} = \dots\dots\dots$

■ PROPRIÉTÉ :

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} \quad (3)$$

Exemples

- $(\sqrt{2})^3 = \dots\dots\dots$
- $(\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[3]{4^2} = \dots\dots\dots$
- $(\sqrt[3]{5})^6 = \sqrt[3]{5^6} = \dots\dots\dots$

■ PROPRIÉTÉ :

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} \quad (4)$$

Exemples

- $\sqrt[3]{\sqrt[3]{7}} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \dots\dots\dots$

■ PROPRIÉTÉ :

$$\sqrt[nq]{a^{pq}} = \sqrt[n]{a^p} \quad (5)$$

Exemples

- $\sqrt[6]{5^3} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt{2^4} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt[4]{25} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \dots\dots\dots$

- $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[3]{a^2} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt[12]{216} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt[5]{3^{10}} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt[6]{27} = \dots\dots\dots$
- $\sqrt[4]{a^2} \times \sqrt[3]{a} = \dots\dots\dots$

■ PROPRIÉTÉ :

$$\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b} \iff a \geq b \quad (6)$$

Cette équivalence nous permet d'affirmer que la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Exemples

$$3 \dots\dots\dots 2 \iff \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}} \dots\dots\dots 2 \iff \dots\dots\dots$$

$$\iff \dots\dots\dots$$

$$\iff \dots\dots\dots$$

$$\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5}} \dots\dots\dots 5 \iff \dots\dots\dots$$

$$\iff \dots\dots\dots$$

$$\iff \dots\dots\dots$$

Remarque : Les propriétés sont énoncées dans le cas de radicandes positifs. Toutefois, elles sont encore valables lorsque les radicandes sont négatifs, tant que les indices et les exposants satisfont les conditions évidentes pour que ce qui est écrit ait un sens.

Remarque : La première 1 est valable pour un nombre quelconque de facteurs : si k est un entier supérieur ou égal à 1 et $a_1, \dots, a_k$ des réels, alors

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_k} = \dots\dots\dots$$

Remarque : Dans le cas particulier où $a = 1$, la propriété 2 devient

$$\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \dots\dots\dots$$

Remarque : Grâce à la propriété 6, on peut dire que :

$$a \geq 1 \iff \dots\dots\dots$$

$$0 \leq a \leq 1 \iff \dots\dots\dots$$



En allemand...

- La racine n -ième : die n te Wurzel

2. Logarithmes

A. Introduction

Parmi les équations ci-dessous, lesquelles savez-vous résoudre (et dans ce cas, donner les solutions) ?

- $x^2 = 4$
- $3^x = 81$
- $3^x = -8$
- $x^3 = -8$
- $2x - 2 = 2$
- $2^x = 5$
- $8x = 3$
- $3^x = 20$

Il est possible de définir la fonction f telle que

$$f(x) = a^x$$

pour tout réel x . Nous allons nous intéresser à la construction de sa courbe pour aider à résoudre les équations de la forme $a^x = b$, avec a et b des réels.

Exemple

Construction de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2^x$ et résolution de l'équation $2^x = 5$.

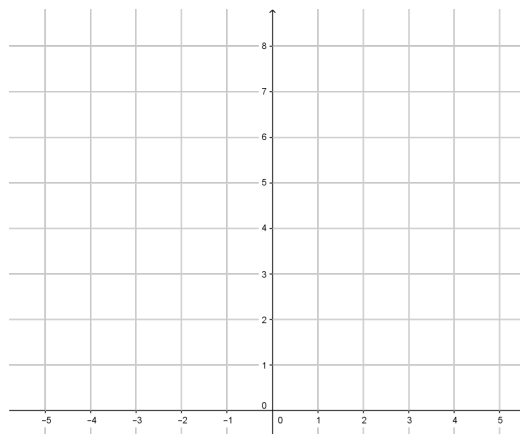
On remplit d'abord un tableau de valeurs pour des valeurs de x entier relatif

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)$	...	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	...

On complète ensuite avec quelques valeurs pour des exposants rationnels :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1,4 \text{ et}$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$$

On trace la courbe en reliant continûment les points obtenus.



Pour résoudre l'équation $2^x = 16$, on sait que

$$16 = \dots\dots\dots$$

donc **une** solution de l'équation est $x = 4$.

Mais rien ne dit que c'est la seule solution.

De plus, nous ne savons pas aussi facilement résoudre l'équation $2^x = 5$.

La **lecture graphique** va nous apporter deux informations :

- On observe qu'il existe une solution et qu'elle est unique puisque la droite d'équation $y = 5$ coupe la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 2^x$ en un unique point.
- On peut lire une valeur approchée de la solution $x \approx \dots\dots\dots$

La valeur exacte de la solution de l'équation est la valeur de l'exposant qu'il faut donner à 2 pour obtenir 5. Ce nombre est appelé le « logarithme en base 2 de 5 » et est noté $\log_2(5)$.

■ DÉFINITION :

Soient a et b deux réels strictement positifs et $a \neq 1$. On définit le logarithme de b en base a comme étant l'unique réel x tel que $a^x = b$.

On le note $x = \log_a(b)$

Exemple

Que vaut $\log_5(125)$?

.....
.....

Remarque : On a l'équivalence :

$$a^x = b \iff \log_a(b) = x$$

Exemple

$$2^4 = 16 \iff 4 = \dots\dots\dots$$

$$2^{-3} = \frac{1}{8} \iff -3 = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3 \iff \frac{1}{2} = \dots\dots\dots$$

Conséquence de cette définition :

■ PROPRIÉTÉ :

$$\log_a(a^x) = x \text{ et } a^{\log_a(x)} = x$$

et donc

■ PROPRIÉTÉ : Généralisation

Pour tout n entier,

$$a^{\log_a(x^n)} = x^n \text{ et } \left(a^{\log_a(x)}\right)^n = x^n$$

D'où l'égalité

ou encore On en déduit :

■ PROPRIÉTÉ :

Soit a un réel strictement positif différent de 1.

Pour tout réel x strictement positif,

$$\log_a(x^n) = n \times \log_a(x)$$

Exemple

Calculer $\log_2(8)$

$$\log_{10}(100\,000)$$

$$\log_9\left(\frac{1}{81}\right)$$

$$\log_3(\sqrt{27})$$

B. Propriétés et règles de calculs

Notons $X = \log_a(x)$ et $Y = \log_a(y)$ On a alors $a^X = x$ et $a^Y = y$ et

$$\begin{aligned} \log_a(x \times y) &= \log_a(a^X \times a^Y) \\ &= \log_a(a^{X+Y}) \\ &= X + Y \\ &= \log_a(x) + \log_a(y) \end{aligned}$$

■ PROPRIÉTÉ : (relation fonctionnelle)

Soit a un réel strictement positif différent de 1.

Pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Remarque : On dit que le logarithme en base a « transforme la multiplication en addition ».

Exemple

$$\log_2(4 \times 8) = \log_2(4) + \log_2(8)$$

Remarque : Ici, grâce aux puissances de 2

$$\begin{aligned} \log_2(4 \times 8) &= \log_2(2^2 \times 2^3) \\ &= \log_2(2^{2+3}) \\ &= 2 + 3 \\ &= \log_2(4) + \log_2(8) \end{aligned}$$

■ PROPRIÉTÉ : (calculs de logarithmes)

Soit a un réel strictement positif différent de 1.

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$\log_a(1) = 0$	et $a^0 = 1$
$\log_a(a) = 1$	et $a^1 = a$
$\log_a(a^x) = x$	et $a^{\log_a(x)} = x$
$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	et $a^x \times a^y = a^{x+y}$
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$	et $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$\log_a(x^n) = n \times \log_a(x)$	et $(a^x)^n = a^{nx}$

Exemples

Calculer les expressions suivantes (si aucune base n'est écrite pour le logarithme, on considère que la base est 10) :

$$A = \log_5(125)$$

$$B = \log_7(49^{-2})$$

$$C = \log_3(\sqrt{3}) + \log_3(3^5) - \log_3(9)$$

$$D = \log_2(8) + \log_2(\sqrt[3]{2}) - \log_2(16)$$

$$E = \log_3\left(\frac{1}{3}\right) + \log_3\left(\frac{3}{5}\right) + \log_3\left(\frac{5}{7}\right) + \log_3\left(\frac{7}{9}\right)$$

$$F = \log\left(\left(\sqrt{2} + 1\right)^{2015}\right) + \log\left(\left(\sqrt{2} - 1\right)^{2015}\right)$$

$$G = \log(\sqrt{10}) - 3 \log(100) + \log(1000)$$

Exemples

Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\log(u)$ et de $\log(v)$ où u et v sont deux réels strictement positifs :

$$A = \log\left(\frac{u^5}{v^3}\right)$$

$$B = \frac{1}{3} \log(u^2 \sqrt{v})$$

$$C = \log\left(\frac{u}{\sqrt{v}}\right) - \log\left(\frac{\sqrt{u}}{v}\right)$$

$$D = \log\left(\frac{u}{v}\right) + \log\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$E = \log(\sqrt[3]{uv}) - \frac{1}{3} \log(u^2)$$

$$F = \log(\sqrt{uv}) - \log\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right)$$

C. Un nouveau type d'équations

■ PROPRIÉTÉ :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1 et b un réel. On considère l'équation $a^x = b$ d'inconnue x .

- L'équation possède une unique solution si et seulement si b est strictement positif. Dans ce cas, la solution est $x = \log_a(b)$.
- Lorsque b est négatif ou nul, l'équation n'a aucune solution.

Exemples

Sait-on résoudre $2^x = 17$?

et $2^x = -5$?

et $2^x = 32$?

et $2^x = 1$?

MÉTHODE :

Pour résoudre une équation de la forme $a \times b^x = c \times d^x$, on se ramène à $\frac{a}{c} = \left(\frac{b}{d}\right)^x$ puis on applique la propriété précédente.

Exemples

Résoudre $3 \times 2^x = 36$

et $13 \times 2^x = 5 \times 6^x$

et $36 \times 5^x = 25 \times 6^x$

Exemple

(Application aux pourcentages) Une certaine population croît de 0,8 % par an. Déterminer après combien d'années cette population aura doublé.

.....
.....
.....

Exemple

Un capital de 7 000 euros est placé à un taux annuel de 1,2 %. Après n années, la valeur acquise est de 8 472 euros. Combien d'années se sont écoulées ?

D. Changements de base logarithmique

La base 10 est très utilisée en sciences. Pour tout réel a strictement positif et différent de 1, on peut exprimer un logarithme en base a ($\log_a$) en logarithme décimal ($\log$).

■ PROPRIÉTÉ :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. Pour tout réel x strictement positif,

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$



En allemand...

- Le logarithme : der Logarithmus