

Séquence 6 – Systèmes d'équations – Autour des droites

Exercice 1

Dans un repère, on considère (d) la droite d'équation $y = 3x + 7$.

1. Vérifier que les points $A\left(-\frac{2}{3}; 5\right)$ et $B(0; 7)$ appartiennent à la droite (d) .
2. Les points A , B et $C(-1; 4)$ sont-ils alignés ?

Exercice 2

Dans un repère, on considère (d) la droite d'équation $y = \frac{5}{2}x - 1$.

1. A est le point de la droite (d) d'abscisse 6. Quelle est son ordonnée ?
2. B est le point de la droite (d) d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
3. C est le point de la droite (d) d'ordonnée 4. Quelle est son abscisse ?
4. D est le point de la droite (d) d'ordonnée $-\frac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?

Exercice 3

Dans un repère d'origine O , on considère les points

$$A(1; 5), B(-2; 4), C(1; 4) \text{ et } D(-3; 5)$$

Déterminer l'équation des droites suivantes :

- (AB) • (BC) • (AC) • (OD)

Exercice 4

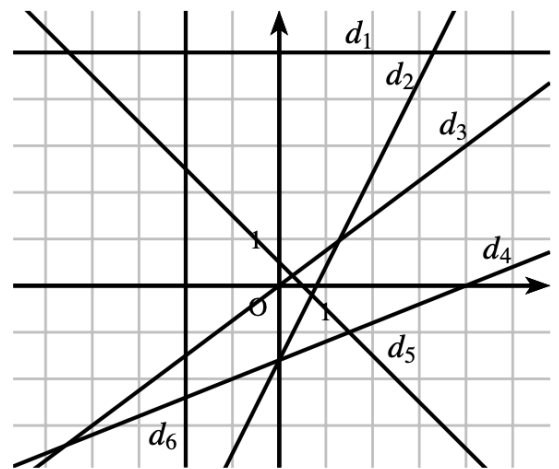
Déterminer, par la méthode de votre choix, l'équation de la droite (MN) dans chacun des cas suivants :

1. $M(-5; 2)$ et $N(7; 20)$
2. $M(4, 9; -2)$ et $N(0, 7; -2)$
3. $M\left(\frac{3}{4}; 25\right)$ et $N(0, 75; -100)$
4. $M\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ et $N(4; -3)$

Exercice 5

Associer les droites (d_1) à (d_6) à leur équation. Une droite se trouvera alors sans équation : la déterminer.

- $-\frac{2}{5}x + y + \frac{8}{5} = 0$
- $y - 5 = 0$
- $x - 2 = 0$
- $-3x + 4y = 0$
- $x + y = \frac{1}{2}$
- $y = 2x - \frac{8}{5}$



Exercice 6

Dans un repère, on considère les points $A(-1; 6)$, $B(3; -2)$, $C(-5; 3)$

1. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) .
2. Donner l'équation de la droite (d) passant par C et parallèle à la droite (AB) .

Exercice 7

Dans un repère, on donne trois points :

$$A(-1; 2), B(3; 7), C(5; -1)$$

1. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$
2. Déterminer l'équation de la droite d parallèle à la droite (BC) et qui passe par I .
3. Vérifier que la droite (d) passe par le milieu J du segment $[AC]$. Quelle propriété de géométrie vient-on d'illustrer ?

Séquence 6 – Systèmes d'équations – résolution de systèmes

Exercice 8

Parmi les couples $(8 ; 0)$, $(0 ; -10, 5)$, $(3 ; 1)$ et $(5 ; 2)$, lesquels sont solutions du système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 5x - 2y = 21 \end{cases}$$

Exercice 9

Déterminer un couple solution du système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$$

Est-ce le seul ? Essayer d'en trouver d'autres...

Exercice 10

Déterminer un couple solution du système

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

Est-ce le seul ? Essayer d'en trouver d'autres...

Exercice 11

Résoudre graphiquement les systèmes suivantes :

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x = y - 5 \\ x + y = 13 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0 \\ -4x + y + 9 = 0 \end{cases}$$

Exercice 12

Résoudre par substitution les systèmes suivantes :

$$(\mathcal{S}_3) : \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - 5y = -21 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_4) : \begin{cases} 7x - 3y = -48 \\ x + 11y = 16 \end{cases}$$

Exercice 13

Dans un troupeau composé de chameaux et de dromadaires, il y a 39 têtes et 51 bosses. Quelle est la composition du troupeau ?

Exercice 14

Résoudre par combinaison les systèmes suivantes :

$$(\mathcal{S}_5) : \begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_6) : \begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ -3x + y = 3 \end{cases}$$

Exercice 15

Résoudre par la méthode de votre choix les systèmes suivantes :

$$(\mathcal{S}_7) : \begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 4x + 11y = -6 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_8) : \begin{cases} 15x - 14y = -3 \\ 12x + 7y = 5 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_9) : \begin{cases} 2x - 5y + 8 = 0 \\ x - 7y - 15 = 0 \end{cases}$$

Exercice 16

1. Résoudre le système :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 5u + 2v = 26 \\ 2u - 3v = -1 \end{cases}$$

2. Dédurre de la question précédente les solutions des systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \begin{cases} 5x + 2y^2 = 26 \\ 2x - 3y^2 = -1 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_{11}) : \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 26 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1 \end{cases}$$

Exercice 17

Résoudre les systèmes :

$$(\mathcal{S}_{12}) : \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = 9 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_{13}) : \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ -x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

Correction : Exercices 1 à 7

Correction : Exercice 1

Dans un repère, on considère (d) la droite d'équation $y = 3x + 7$.

1. Vérifier que les points $A\left(-\frac{2}{3}; 5\right)$ et $B(0; 7)$ appartiennent à la droite (d) .

Pour vérifier si un point appartient à la droite, on substitue les coordonnées du point dans l'équation de la droite.

— Pour $A\left(-\frac{2}{3}; 5\right)$:

$$y = 3x + 7$$

$$y = 3\left(-\frac{2}{3}\right) + 7$$

$$y = -2 + 7$$

$$y = 5$$

— Pour $B(0; 7)$:

$$y = 3x + 7$$

$$y = 3(0) + 7$$

$$y = 7$$

Donc Les points A et B appartiennent à la droite (d) car leurs coordonnées vérifient l'équation de la droite.

2. Pour vérifier que les points A , B et C sont alignés, on va étudier si le point $C(-1; 4)$ appartient à la droite (AB) , donc nous allons vérifier si ses coordonnées satisfont l'équation de la droite passant par les points A et B .

$$y = 3x + 7$$

$$y = 3(-1) + 7$$

$$y = -3 + 7$$

$$y = 4$$

Le point $C(-1; 4)$ appartient à la droite (AB) .

Correction : Exercice 2

Dans un repère, on considère (d) la droite d'équation $y = \frac{5}{2}x - 1$.

1. A est le point de la droite (d) d'abscisse 6. Quelle est son ordonnée ?

Pour trouver l'ordonnée du point A lorsque son abscisse est 6, on substitue $x = 6$ dans l'équation de la droite.

$$\begin{aligned}y &= \frac{5}{2} \times 6 - 1 \\&= \frac{30}{2} - 1 \\&= 15 - 1 \\&= 14\end{aligned}$$

Donc, l'ordonnée du point A est 14.

2. B est le point de la droite (d) d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?

De manière similaire, pour trouver l'ordonnée du point B lorsque son abscisse est 12, on substitue $x = 12$ dans l'équation de la droite.

$$\begin{aligned}y &= \frac{5}{2} \times 12 - 1 \\&= \frac{60}{2} - 1 \\&= 30 - 1 \\&= 29\end{aligned}$$

Ainsi, l'ordonnée du point B est 29.

3. C est le point de la droite (d) d'ordonnée 4. Quelle est son abscisse ?

Pour trouver l'abscisse du point C lorsque son ordonnée est 4, on substitue $y = 4$ dans l'équation de la droite et on résout pour x .

$$\begin{aligned}4 &= \frac{5}{2}x - 1 \\5 &= \frac{5}{2}x \\x &= \frac{5 \times 2}{5} \\x &= 2\end{aligned}$$

Donc, l'abscisse du point C est 2.

4. D est le point de la droite (d) d'ordonnée $-\frac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?

Pour trouver l'abscisse du point D lorsque son ordonnée est $-\frac{1}{2}$, on substitue $y = -\frac{1}{2}$ dans l'équation de la droite et on résout pour x .

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} &= \frac{5}{2}x - 1 \\ \frac{1}{2} &= \frac{5}{2}x \\ x &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} \\ x &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Ainsi, l'abscisse du point D est $\frac{1}{5}$.

Correction : Exercice 3

— Droite (AB) :

$$\text{Coefficient directeur } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 5}{-2 - 1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Donc $y = \frac{1}{3}x + p$. On remplace ensuite x et y par 1 et 5, qui sont les coordonnées de A , car $A \in (AB)$.
On obtient :

$$\text{Ordonnée à l'origine } p = 5 - \frac{1}{3} \cdot 1 = 5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$$

Donc l'équation de la droite (AB) est $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$.

— Droite (BC) :

$$\text{Coefficient directeur } m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4 - 4}{1 - (-2)} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\text{Ordonnée à l'origine } p = y_B = 4$$

Donc l'équation de la droite (BC) est $y = 4$.

— Droite (AC) :

On remarque que les points A et C ont la même abscisse. La droite est verticale et son équation est de la forme $x = c$. Donc l'équation de la droite (AC) est $x = 1$.

— Droite (OD) :

$$\text{Coefficient directeur } m = \frac{y_D - y_O}{x_D - x_O} = \frac{5 - 0}{-3 - 0} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{Ordonnée à l'origine } p = y_O - m \cdot x_O = 0 - \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 0 = 0$$

Donc l'équation de la droite (OD) est $y = -\frac{5}{3}x$.

En résumé, les équations des droites sont :

— (AB) : $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$

— (BC) : $y = 4$

— (AC) : $x = 1$

— (OD) : $y = -\frac{5}{3}x$

Correction : Exercice 4

1. $M(-5; 2)$ et $N(7; 20)$

Pour déterminer l'équation de la droite (MN) , nous pouvons utiliser la formule de la pente-interception. La pente m est donnée par :

$$m = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{20 - 2}{7 - (-5)} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Ensuite, nous pouvons utiliser l'un des points pour déterminer l'ordonnée à l'origine. Par exemple, en utilisant le point $M(-5, 2)$:

$$y = mx + p \implies 2 = \frac{3}{2} \times (-5) + p \implies p = 2 + \frac{3}{2} \times 5 = 2 + \frac{15}{2} = \frac{19}{2}$$

Donc, l'équation de la droite (MN) est $y = \frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$.

2. $M(4, 9; -2)$ et $N(0, 7; -2)$

Les ordonnées respectives des points M et N sont égales et les abscisses des points M et N sont différentes, donc la droite (MN) est une droite horizontale avec une ordonnée constante de -2 . Donc, l'équation de la droite (MN) est simplement $y = -2$.

3. $M\left(\frac{3}{4}; 25\right)$ et $N(0, 75; -100)$

De manière similaire au cas précédent, les abscisses des points M et N sont égales, donc la droite (MN) est une droite verticale avec qui traduit une abscisse constante de $\frac{3}{4}$. Donc, l'équation de la droite (MN) est simplement $x = \frac{3}{4}$.

4. $M\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ et $N(4; -3)$

Encore une fois, nous utilisons la formule de la pente-interception pour calculer la pente m :

$$m = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{-3 - \frac{1}{2}}{4 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-3,5}{4,25} = -\frac{14}{17}$$

Ensuite, en utilisant le point $M\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$:

$$y = mx + p \implies \frac{1}{2} = -\frac{14}{17} \times \left(-\frac{1}{4}\right) + p \implies p \approx \frac{1}{2} - \left(-\frac{14}{17}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{7}{34} = \frac{5}{17}$$

Donc, l'équation de la droite (MN) est $y \approx -\frac{14}{17}x + \frac{5}{17}$.

Correction : Exercice 5

- $-\frac{2}{5}x + y + \frac{8}{5} = 0 \iff y = \frac{2}{5}x - \frac{8}{5}$

On cherche donc une droite de coefficient directeur positif et d'ordonnée à l'origine négative. Il y en a deux : (d_2) et (d_4) .

Or, pour $y = 0$, on obtient $0 = \frac{2}{5}x - \frac{8}{5}$, c'est-à-dire $0 = 2x - 8$, c'est-à-dire $x = 4$.

Donc la première équation correspond à la droite (d_4) .

- $y - 5 = 0 \iff y = 5$

La seule droite horizontale est la droite (d_1) , donc cette équation correspond à la droite (d_1)

- $x - 2 = 0 \iff x = 2$

La seule droite verticale est la droite (d_6) , donc cette équation correspond à la droite (d_6)

- $-3x + 4y = 0 \iff 4y = 3x \iff y = \frac{3}{4}x$

La seule droite qui passe par l'origine est la droite (d_3) , donc cette équation correspond à la droite (d_3)

- $x + y = \frac{1}{2} \iff y = \frac{1}{2} - x$

On cherche donc une droite de coefficient directeur négatif et d'ordonnée à l'origine positif. Il n'y en a qu'une : (d_5) .

Donc cette équation correspond à la droite (d_5) .

- $y = 2x - \frac{8}{5}$

On cherche donc une droite de coefficient directeur positif et d'ordonnée à l'origine négative. Il y en a deux : (d_2) et (d_4) , et (d_4) correspond à la première équation.

Donc cette dernière équation correspond à (d_2)

Correction : Exercice 6

1. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) .

Pour calculer le coefficient directeur m de la droite (AB) , on utilise la formule :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Avec les coordonnées $A(-1, 6)$ et $B(3, -2)$, on a :

$$m = \frac{-2 - 6}{3 - (-1)} = \frac{-8}{4} = -2$$

Donc, le coefficient directeur de la droite (AB) est -2 .

2. Donner l'équation de la droite (d) passant par C et parallèle à la droite (AB) .

Puisque la droite (d) est parallèle à la droite (AB) , elle a le même coefficient directeur. Ainsi, d a pour équation :

$$y = mx + p$$

où m est le coefficient directeur de la droite (AB) , et p est l'ordonnée à l'origine que nous devons déterminer.

En utilisant le point $C(-5, 3)$, on peut substituer ses coordonnées dans l'équation de la droite (d) :

$$3 = -2 \times (-5) + p$$

Ce qui donne :

$$3 = 10 + p \implies p = 3 - 10 = -7$$

Donc, l'équation de la droite (d) est :

$$y = -2x - 7$$

Correction : Exercice 7

1. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont données par les moyennes des coordonnées des points A et B :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

En substituant les valeurs des points A et B , on obtient :

$$I\left(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{2 + 7}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{9}{2}\right) = (1, 4.5)$$

Donc, les coordonnées du milieu I sont $(1, 4.5)$.

2. Déterminer l'équation de la droite d parallèle à la droite (BC) et qui passe par I .

Puisque la droite d est parallèle à la droite (BC) , elle aura le même coefficient directeur. Le coefficient directeur de la droite (BC) est donné par :

$$m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1 - 7}{5 - 3} = \frac{-8}{2} = -4$$

Ainsi, l'équation de la droite d est de la forme $y = mx + p$, où $m = -4$ (le coefficient directeur de (BC)) et p est l'ordonnée à l'origine que nous devons déterminer.

Nous utilisons les coordonnées de $I(1, 4.5)$ pour trouver p :

$$4.5 = -4 \times 1 + p \implies p = 4.5 + 4 = 8.5$$

Donc, l'équation de la droite d est $y = -4x + 8.5$.

3. Vérifier que la droite d passe par le milieu J du segment $[AC]$. Quelle propriété de géométrie vient-on d'illustrer ?

Les coordonnées du milieu J du segment $[AC]$ sont également obtenues en faisant la moyenne des coordonnées des points A et C :

$$J\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

En substituant les valeurs des points A et C , on obtient :

$$J\left(\frac{-1 + 5}{2}, \frac{2 - 1}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, 0.5)$$

Donc, les coordonnées du milieu J sont $(2, 0.5)$.

Nous vérifions maintenant si la droite d passe par le point $J(2, 0.5)$. En substituant les coordonnées de J dans l'équation de la droite d , nous obtenons :

$$0.5 = -4 \times 2 + 8.5 \implies 0.5 = -8 + 8.5 \implies 0.5 = 0.5$$

Comme cette égalité est vraie, cela confirme que la droite (d) passe par le milieu J du segment $[AC]$.

La propriété de géométrie illustrée est que dans un triangle, le segment reliant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté et de longueur égale à la moitié de ce dernier.