

Systèmes linéaires

1. Équations de droites

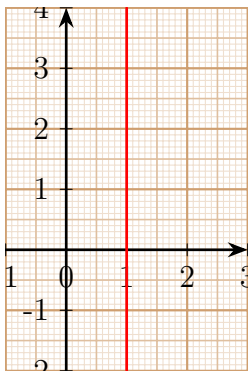
■ PROPRIÉTÉ :

On se place dans un repère du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

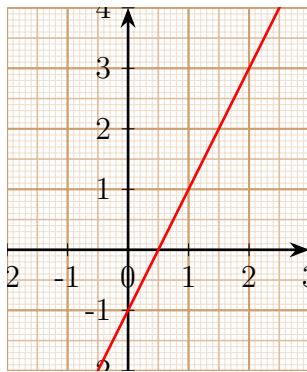
Toute droite du plan peut être caractérisée par une équation de la forme :

- $x = c$ si cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées (droite « verticale »), avec $c \in \mathbb{R}$.
- $y = mx + b$ si cette droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, avec m et b réels.

Exemple



Droite d'équation



Droite d'équation

■ DÉFINITION :

Dans le second cas, m est appelé le coefficient directeur et b est appelé l'ordonnée à l'origine.

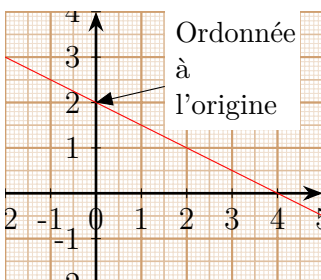
■ PROPRIÉTÉ :

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan non confondus. Ainsi -----.

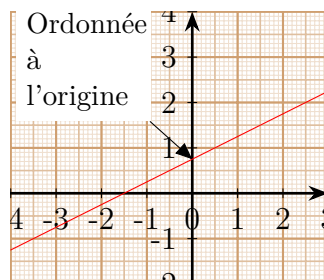
Le coefficient directeur de la droite (AB) vaut

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{« Déplacement vertical »}}{\text{« Déplacement horizontal »}}$$

L'« ordonnée à l'origine » est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées :



Coefficient directeur
négatif



Coefficient directeur
positif

Exemple

Déterminer le coefficient directeur de la droite passant par les points $A(3 ; 1)$ et $B(1 ; 4)$.

MÉTHODE :

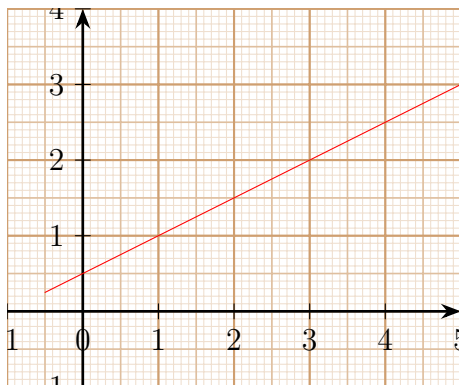
On peut lire le coefficient directeur d'une droite sur un graphique :

- Choisir deux points A et B (distincts) sur la droite.
- Se déplacer de A vers B par la méthode « de l'escalier »
- En déduire le coefficient directeur :

$$\frac{\text{« Déplacement vertical »}}{\text{« Déplacement horizontal »}}$$

Exemple

On considère la droite suivante :



En allemand...

- Coefficient directeur : die Steigung
- Ordonnée à l'origine : der y -Achsenabschnitt
- L'équation d'une droite : die Geradengleichung

2. Système de deux équations linéaires à deux inconnues

A. Équation linéaire à deux inconnues

DÉFINITION :

Une équation linéaire à deux inconnues est une équation de la forme $ax + by = c$ où a , b et c sont des nombres fixés (appelés paramètres) avec a et b non simultanément nuls.

Exemple

$3x + 4y = 10$ est une équation linéaire à deux inconnues.

DÉFINITION :

Un couple $(x ; y)$ est une solution de l'équation si l'égalité $ax + by = c$ est vraie.

Exemples

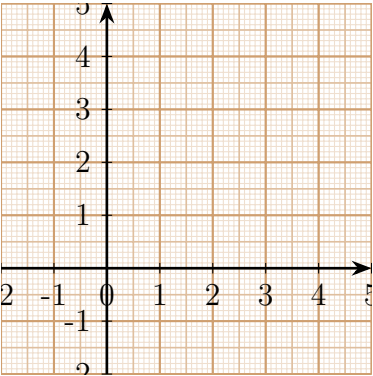
(..... ;) est un couple solution de l'équation
.....
(..... ;) n'est pas un couple solution de l'équation car
(..... ;) ist eine Lösung der linearen Gleichung.

PROPRIÉTÉ :

On peut ajouter, soustraire, multiplier et diviser par le même nombre chaque membre d'une équation. On obtient une équation équivalente, c'est-à-dire qui a le même ensemble de solutions.

Exemple

$3x + 4y = 10$
est équivalente à
 $3x = \dots\dots$ ou encore à
 $6x + 8y = \dots\dots\dots$
ou encore à
 $4y = \dots\dots\dots$



On peut dire que
 $3x + 4y = 10 \iff x = \dots\dots\dots$
 $3x + 4y = 10 \iff y = \dots\dots\dots$

On a exprimé y en fonction de x , on trouve ainsi une équation de droite de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine

■ PROPRIÉTÉ :

L'ensemble des points dont les coordonnées sont des couples solutions d'une équation linéaire à deux inconnues est une droite du plan.

■ DÉFINITION :

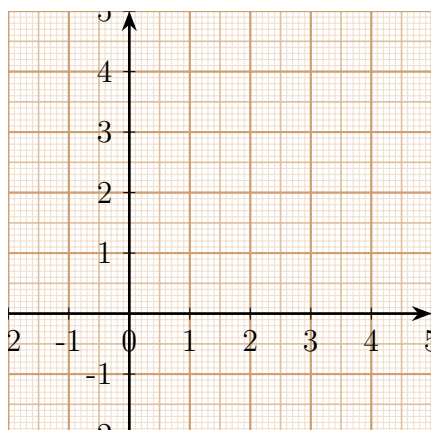
On dit que $ax+by=c$ est une équation cartésienne de droite.

Remarque : Une équation linéaire à deux inconnues admet donc une infinité de solutions représentée par les coordonnées des points d'une droite.

Exemple

Dans le repère suivant, tracer la droite d'équation

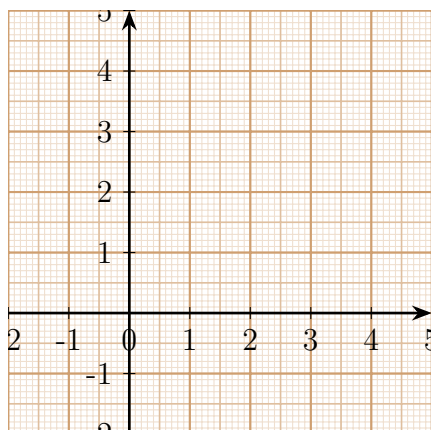
$$x - y - 1 = 0$$



Exemple

Dans le repère suivant, tracer la droite d'équation

$$x + 3y = 9$$



En allemand...

- Äquivalente Gleichung durch Umformung
- Die Lösungen bilden eine Gerade.

B. Deux équations linéaires à deux inconnues

■ DÉFINITION :

Un système d'équations linéaires à deux inconnues est un système pouvant s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où les coefficients a, a', b, b', c et c' sont des réels tels que a et b sont non simultanément nuls et a' et b' sont non simultanément nuls.

■ DÉFINITION :

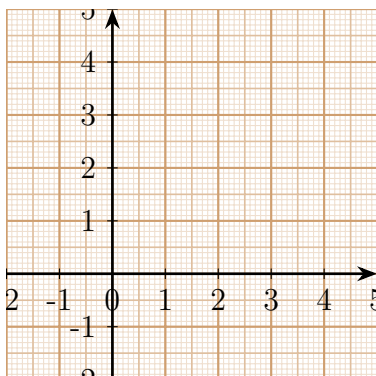
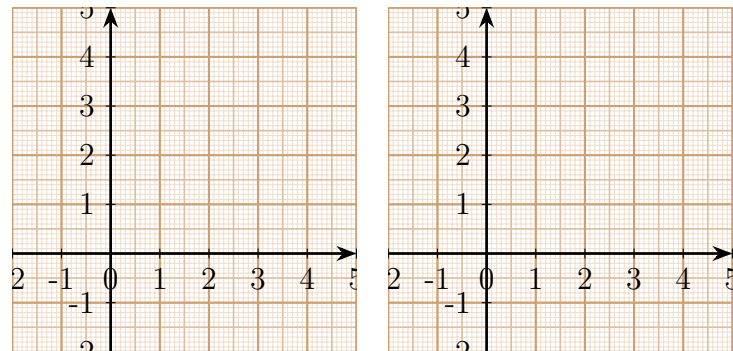
Résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues signifie trouver tous les couples de réels $(x; y)$ solutions des deux équations simultanément.

Exemple

$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$ est un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

■ PROPRIÉTÉ :

Résoudre un tel système revient à rechercher les éventuels points d'intersection de deux droites. Un tel système a donc une, aucune ou une infinité de solutions.



■ DÉFINITION :

$(\mathcal{S})$ est le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Le réel $ab' - a'b$ est appelé déterminant du système.

■ PROPRIÉTÉ :

- Si le déterminant d'un système est différent de 0, alors le système admet une unique solution.
- Si le déterminant d'un système est égal à 0, alors le système n'admet pas de solution ou bien admet une infinité de solutions.

Exemples

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -7x + y = 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} y = 1 - 2x \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} x - 3y = 1 \\ -8x + 24y = 16 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_4) \begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = -2 \end{cases}$$

3. Méthode de résolution

Le principe général est d'éliminer une inconnue pour se ramener à la résolution d'une équation à une seule inconnue. Pour cela, on peut modifier un système sans en changer les solutions en remplaçant une de ses équations par une équation équivalente. On distingue deux méthodes par le calcul.

A. Résolution par substitution

Exemple

Résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2y = 13 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$$



B. Résolution par combinaison

Exemple

Résoudre le système

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$



En allemand...

Résolution par substitution : Einsetzungsverfahren

Résolution par combinaison : Gauß-Verfahren (oder Additionsverfahren)

4. Mise en équation d'un problème

Exemple

Dans un musée, un jour normal, la recette s'élève à 1 730 € pour 390 entrées dont 110 enfants. Le lendemain, les tarifs sont réduits : le prix de l'entrée baisse de 25% pour les adultes et de 50% pour les enfants. On enregistre alors une recette de 1 410 € pour 360 entrées adultes et 40 entrées enfants. Quel est le prix normal de chaque catégorie d'entrée ?

5. Systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues

Pourquoi les deux systèmes ci-dessous sont faciles à résoudre ?

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2y + 3z = 0 \\ 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x + 4y = 9 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

■ PROPRIÉTÉ :

Tout « système 3×3 » peut se résoudre par la méthode du pivot de Gauß.

■ MÉTHODE :

Par combinaisons linéaires ou par substitution, on élimine une inconnue dans deux des trois équations. On obtient ainsi un sous-système de deux équations à deux inconnues que l'on sait résoudre avant de revenir à la troisième équation pour déterminer la dernière inconnue.

Exemple

Résoudre, sur le cahier, le système suivant par la méthode du pivot de Gauß ^a :

$$\begin{cases} 3x + 6y - 2z = -4 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ \frac{3}{2}x + 5y - 5z = -9 \end{cases}$$

^a. Carl Friedrich Gauß (1777-1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand.

■ PROPRIÉTÉ : Nombre de solutions d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues

Il faut d'abord mettre le système sous forme échelonnée puis le nombre de solutions apparaît.

Exemple

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ y + 3z = 0 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

Ici, $(\mathcal{S}_1)$ admet solution.

Exemple

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} x + 2y - 4z = 2 \\ 3y + 2z = 0 \\ 1 = 2 \end{cases}$$

Ici, $(\mathcal{S}_2)$ admet solution.

Exemple

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ 2y - 6z = 2 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$$

Ici, $(\mathcal{S}_3)$ admet solution .

Pour $(\mathcal{S}_3)$, si on décide d'exprimer x et y en fonction de z , on trouve les triplets solutions sous la forme :

.....

.....