

Pourcentages

1. Calculer un pourcentage

■ **MÉTHODE** : Calculer t % d'une quantité

Soit $t \in \mathbb{R}$.

Pour calculer t % d'une quantité, on multiplie cette quantité par $\frac{t}{100}$.

Exemple

Un tee-shirt coûte 36 euros. Sur l'étiquette, on peut lire « - 20 % ». Combien va-t-on économiser ?

On va économiser 20 % de 36 euros, c'est-à-dire $\frac{20}{100} \times 36 = 7,20$ euros.

2. Augmentation ou réduction

Soit $t \in \mathbb{R}$. On souhaite effectuer une augmentation (respectivement une réduction) de t % d'une quantité.

■ **DÉFINITION** : Taux d'évolution

t est appelé le taux d'évolution de la quantité.

■ **PROPRIÉTÉ** : Augmentation ou réduction

Pour calculer une augmentation (respectivement une réduction) de t % d'une quantité, on multiplie cette quantité par $1 + \frac{t}{100}$ (respectivement par $1 - \frac{t}{100}$).



Attention

Une réduction est tout de même une multiplication

Démonstration.

Soit x une quantité. Soit $t \in \mathbb{R}$.

On calcule d'abord t % de x , c'est-à-dire $\frac{t}{100} \times x$, puis, dans le cas de l'augmentation, on ajoute x pour calculer le résultat de l'augmentation.

On obtient $x + \frac{t}{100} \times x$, c'est-à-dire

$$x \times 1 + \frac{t}{100} \times x$$

c'est-à-dire $x \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ en factorisant par x .

□

Exemple

Un téléviseur coûte 150 €. Son prix augmente de 8 %. Quel est le nouveau prix ?

Le coefficient multiplicateur associé à l'augmentation de 8 % est $1 + \frac{8}{100} = 1,08$, le nouveau prix est donc $150 \times 1,08$, soit 162 €.

■ **DÉFINITION** : coefficient multiplicateur

$1 + \frac{t}{100}$ est appelée le coefficient multiplicateur.

Exemples

- Une augmentation de 12 % correspond à un coefficient multiplicateur de 1,12.
- Une diminution de 12 % correspond à un coefficient multiplicateur de 0,88.
- Un coefficient multiplicateur de 0,63 correspond à une diminution de 37 %.

■ **PROPRIÉTÉ** : Déterminer le taux d'évolution

Soient V_D et V_A deux nombres réels. Supposons que V_D est la valeur de départ et V_A la valeur d'arrivée après une évolution de t %. Alors

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100$$

Démonstration. Soient V_D et V_A deux nombres réels.

On sait que $V_D \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) = V_A$

c'est-à-dire $V_D + V_D \times \frac{t}{100} = V_A$

ou encore $V_D \times \frac{t}{100} = V_A - V_D$

c'est-à-dire $\frac{t}{100} = \frac{V_A - V_D}{V_D}$

On en conclut que $t = \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100$

□

Exemple

Une maison coûte 300 000 euros en 2021 et 324 000 euros en 2023. Le taux d'évolution du prix de cette maison entre ces deux années est

$$t = \frac{324\,000 - 300\,000}{300\,000} \times 100 = 8$$

Ainsi le prix de la maison a augmenté de 8 %.

3. Évolutions successives

Dans le cas d'évolutions successives, il faut calculer le coefficient multiplicateur **global** :

■ PROPRIÉTÉ : (démontrée en DM)

Le coefficient multiplicateur correspondant à des évolutions successives est le produit des coefficients multiplicateurs correspondant aux différentes évolutions.

Exemple

Le prix d'un produit subit successivement : une hausse de 10 %, une baisse de 30 % et enfin une hausse de 35 %. Quelle évolution globale le prix de ce produit a-t-il subi ?

Le coefficient multiplicateur de ces évolutions est égal à : $1,1 \times 0,7 \times 1,35 = 1,0395$, ce qui correspond à une augmentation de 3,95 %

4. Intérêts composés

■ DÉFINITION : Intérêts composés

Un capital est placé à intérêts composés lorsque le montant des intérêts produits à la fin de chaque période de placement s'ajoute au capital placé pour devenir productif d'intérêts la période suivante.

■ PROPRIÉTÉ :

Notons C_0 le capital initial. On note t le taux d'intérêt sur une période. On place C_0 à intérêts composés pendant n périodes, et on note C_n le capital au bout de n périodes de placement. Alors

$$C_n = C_0 \times (1 + t)^n$$

Remarque : On utilise le mot *période* car les périodes de capitalisation des intérêts peuvent être le mois, le trimestre, le semestre ou l'année.

Exemple

Un capital de 5 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 4 % pendant 5 ans. Quelle est la somme d'argent sur son compte au bout de cinq années ?

On calcule $C_5 = 5\,000 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = 6\,083,26$ €.

■ PROPRIÉTÉ : Intérêts acquis

Le montant des intérêts acquis sur la période est

$$i = C_n - C_0$$

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, on obtient $6\,083,26 - 5\,000 = 1\,083,26$ € d'intérêts.

5. Indices de base 100

■ DÉFINITION : Indice simple

L'indice simple est un outil statistique qui permet de faire des comparaisons dans le temps ou dans l'espace. L'indice est caractérisé par sa base, qui correspond, par exemple, à une année ou un pays de référence. On pose :

- v_1 la valeur de la variable de référence servant de base.
- v_2 la valeur de la variable que l'on veut comparer.
- b la base.

Alors
$$\text{Indice} = \frac{v_2}{v_1} \times b$$

Remarque : La base est le plus souvent égale à 100 pour faciliter la lecture de l'indice.

Exemple

Si l'indice de prix d'un bien immobilier est de 105 en 2023, exprimé en indice base 100 pour l'année 2022, cela signifie qu'entre 2022 et 2023, le prix de ce bien a augmenté de 5 %.

■ PROPRIÉTÉ :

Un indice est un nombre réel positif ou nul.

Remarque :

- Un indice est un nombre sans unité.
- Dans le cas d'un indice base 100, appliqué à l'évolution d'une variable, s'il est supérieur à 100, cela signifie que la variable étudiée a augmenté. Si l'indice est inférieur à 100, la variable a diminué par rapport à l'année de référence de la base.

Exemple

À la rentrée 2011-2012, le nombre d'étudiants inscrits à l'université était de 1 289 900. À la rentrée de l'année 2017-2018, on comptait 1 642 200 étudiants. Calculer l'indice du nombre d'étudiants en 2017-2018, pour une base 100 en 2011-2012, puis interpréter le résultat obtenu.

Calcul pour exprimer l'indice du nombre d'étudiants en 2017-2018, pour une base 100 en 2011-2012 (qui est l'année de référence) :

$$\frac{1\,642\,200}{1\,289\,900} \times 100 = 127,3$$

Interprétation : L'effectif a augmenté de 27,3 % entre 2011-2012 et 2017-2018.