

Ensembles de nombres

1. Ensembles fondamentaux de nombres

■ DÉFINITION : Ensemble des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

Ainsi

$$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$$

Exemples

$$3 \in \mathbb{N}$$

$$1, 5 \notin \mathbb{N}$$

$$0 \in \mathbb{N}$$

$$-5 \notin \mathbb{N}$$

■ DÉFINITION : Ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

Ainsi

$$\mathbb{Z} = \{\dots ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \dots\}$$

Remarque : $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$. On dit aussi $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, noté $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Exemples

$$9 \in \mathbb{Z}$$

$$-5 \in \mathbb{Z}$$

$$0 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$$

■ DÉFINITION : Ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Ainsi

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Notation : On note une étoile en haut à droite de l'ensemble pour retirer 0 à cet ensemble. Ainsi :

- $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble $\{1 ; 2 ; \dots\}$
- $\mathbb{Z}^*$ est l'ensemble des entiers relatifs non nuls. On le note aussi $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Remarque : $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Q}$ contient aussi $\mathbb{N}$. On dit aussi $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$, noté $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. On obtient $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Exemples

$$10 \in \mathbb{Q}$$

$$-2 \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{5}{8} \in \mathbb{Q}$$

$$-\frac{10}{3} \in \mathbb{Q}$$

$$\pi \notin \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

■ DÉFINITION : Ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque : $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$, donc $\mathbb{R}$ contient aussi $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$. On dit aussi $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

On obtient finalement $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemples

$$-1, 3 \in \mathbb{R}$$

$$0 \in \mathbb{R}$$

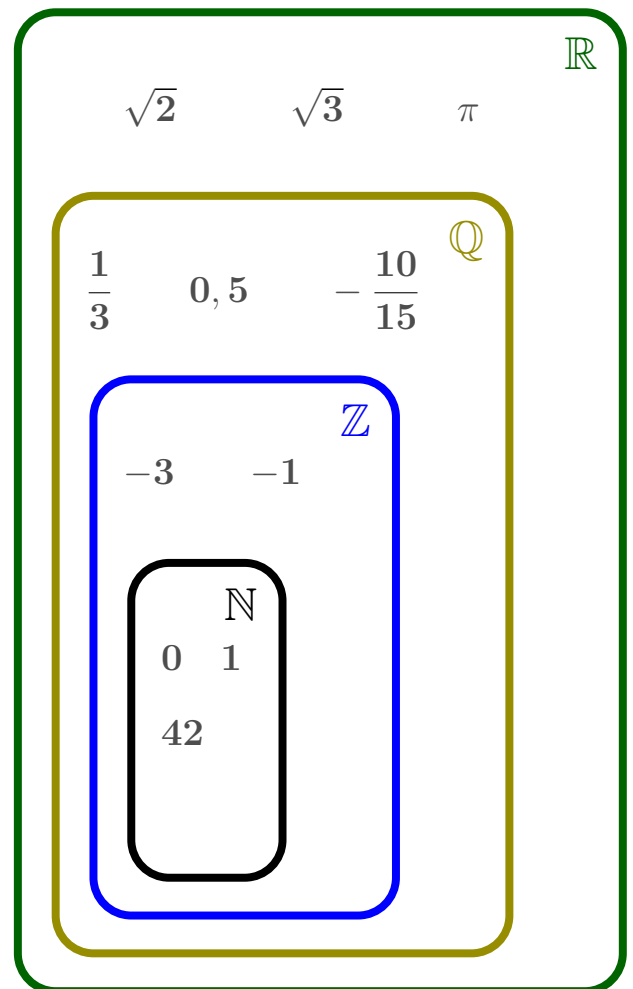
$$4 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{47}{13} \in \mathbb{R}$$

$$\pi \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

À RETENIR :



En allemand...

- En Allemagne, $\mathbb{N} = \{1 ; 2 ; \dots\}$ ne contient pas 0. On note $\mathbb{N}_0 = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots\}$.
- $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen

2. Intervalles

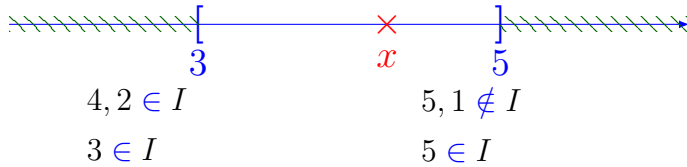
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

A. Définition

■ DÉFINITION : Intervalle fermé

$[a ; b]$ est l'ensemble des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \geq a$ et $x \leq b$.

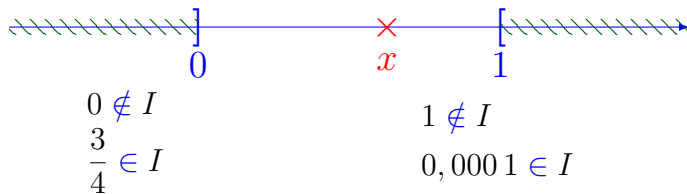
Exemple : Soit $I = [3 ; 5]$.



■ DÉFINITION : Intervalle ouvert

$]a ; b[$ est l'ensemble des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $x > a$ et $x < b$.

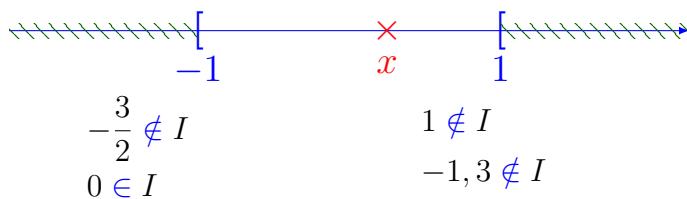
Exemple : Soit $I =]0 ; 1[$.



■ DÉFINITION : Intervalle semi-ouvert à droite

$[a ; b[$ est l'ensemble des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \geq a$ et $x < b$.

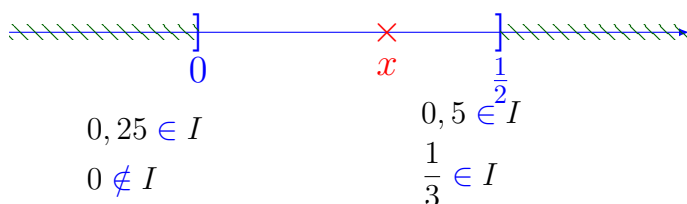
Exemple : Soit $I = [-1 ; 1[$.



■ DÉFINITION : Intervalle semi-ouvert à gauche

$]a ; b]$ est l'ensemble des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $x > a$ et $x \leq b$.

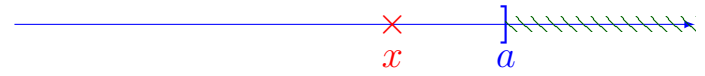
Exemple : Soit $I =]0 ; \frac{1}{2}]$.



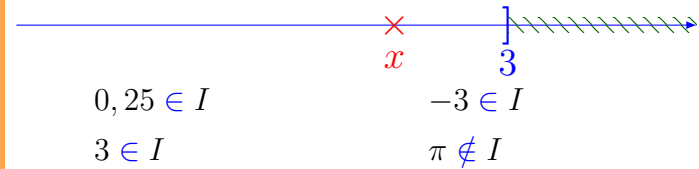
B. Extension de la notion d'intervalle

■ DÉFINITION :

$]-\infty ; a]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leq a$.

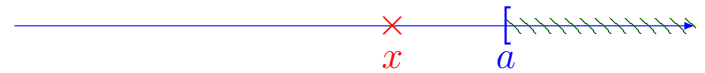


Exemple : Soit $I =]-\infty ; 3]$.



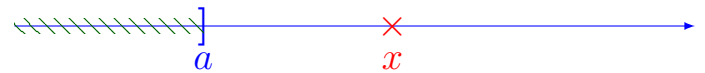
■ DÉFINITION :

$]-\infty ; a[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$.



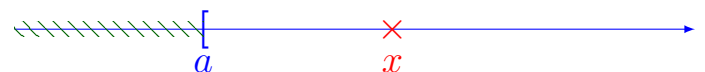
■ DÉFINITION :

$[a ; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$.



■ DÉFINITION :

$]a ; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$.



Exemple :

$]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$



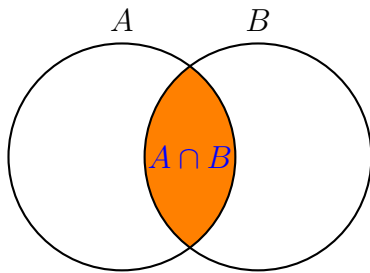
En allemand...

- das geschlossene / offene / halboffene Intervall

3. Intersection et réunion d'intervalles

■ DÉFINITION : Intersection d'intervalles

L'intersection des intervalles I et J , notée $I \cap J$, est l'ensemble constitué des éléments qui sont dans I et aussi dans J .



Remarque : On lit « I inter J » pour $I \cap J$.

Exemple :

$$I = [-3 ; 5[\text{ et } J =]2 ; 8].$$



$$I \cap J =]2 ; 5[.$$

Exemple :

$$I =]-3 ; 2[\text{ et } J = [-5 ; 6[.$$

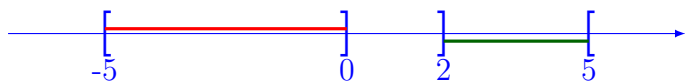


$$I \cap J =]-3 ; 2[.$$

Remarque : Ici $I \cap J = I$ car $I \subset J$.

Exemple :

$$I = [-5 ; 0] \text{ et } J =]2 ; 5[.$$



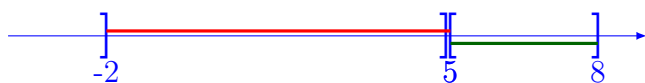
■ DÉFINITION : Ensemble vide

On appelle ensemble vide l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$.

Ainsi $I \cap J = \emptyset$.

Exemple :

$$I = [5 ; 8] \text{ et } J =]-2 ; 5].$$



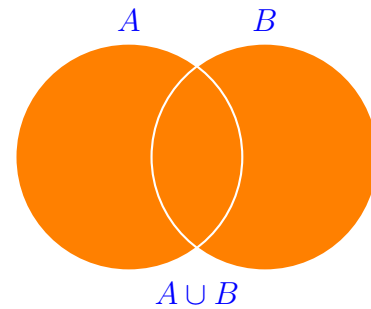
$$I \cap J = \{5\}.$$

■ DÉFINITION : Singleton

On appelle singleton un ensemble qui contient seul élément.

■ DÉFINITION : Réunion d'intervalles

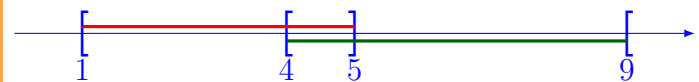
La réunion des intervalles I et J , notée $I \cup J$, est l'ensemble constitué des éléments qui sont dans I ou (inclusif) dans J .



Remarque : On lit « I union J » pour $I \cup J$.

Exemple :

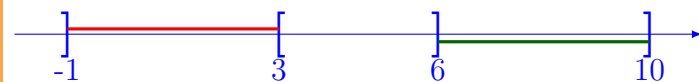
$$I = [1 ; 5] \text{ et } J = [4 ; 9].$$



$$I \cup J = [1 ; 9].$$

Exemple :

$$I =]-1 ; 3[\text{ et } J =]6 ; 10].$$



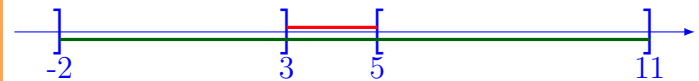
$$I \cup J =]-1 ; 3[\cup]6 ; 10].$$

Remarque : Dans ce cas, la réunion des deux intervalles n'est pas un intervalle.

De plus, $I \cap J = \emptyset$.

Exemple :

$$I =]3 ; 5[\text{ et } J =]-2 ; 11].$$



$$I \cup J =]-2 ; 11].$$

Remarque : Ici $I \cup J = J$ car $I \subset J$.



En allemand...

- der Durchschnitt
- die Vereinigung
- die leere Menge
- die einelementige Menge