

Devoir sur table n°10

Mercredi 18 juin 2025 - 1 h

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Géométrie dans l'espace

4,5 points

Exercice 1 : Vrai ou faux

4,5 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier** chaque réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On se place dans un repère orthonormé.

On considère le plan $(\mathcal{P})$ et la droite $(\mathcal{D})$, de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 + a \\ y = -2 + a + 3b \\ z = 1 + b \end{cases} \text{ où } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

On donne les points $A(1; 1; 0)$ et $B(3; 0; -1)$.

Affirmation 1 : Le point $C(4; 3; 1)$ appartient à la droite $(\mathcal{D})$.

Affirmation 2 : La droite $(\mathcal{D})$ coupe le plan $(\mathcal{P})$ au point C de coordonnées $(4; 3; 1)$.

Affirmation 3 : Les droites (AB) et $(\mathcal{D})$ sont parallèles.

Affirmation 4 : La droite (AB) est parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

Solution:

Affirmation 1

$C(4; 3; 1)$ appartient à $(\mathcal{D})$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\begin{cases} 4 = 2t \\ 3 = 1 + t \\ 1 = -5 + 3t \end{cases}$$

Or,
$$\begin{cases} 4 = 2t \\ 3 = 1 + t \\ 1 = -5 + 3t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases} . \text{ Donc } C \in (\mathcal{D}). \quad \boxed{\text{Donc l'affirmation 1 est vraie.}}$$

Affirmation 2

D'après l'affirmation 1, $C(4; 3; 1) \in (\mathcal{D})$. Vérifions si $C \in (\mathcal{P})$:
$$\begin{cases} 4 = 2 + a \\ 3 = -2 + a + 3b \\ 1 = 1 + b \end{cases}$$

De la première équation : $a = 2$. De la troisième équation : $b = 0$

Or, la deuxième équation n'est pas vérifiée : $3 \neq -2 + 2 + 0$.

Donc $C \notin (\mathcal{P})$. Donc l'affirmation 2 est fausse.

Affirmation 3

Un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-1 \\ -1-0 \end{pmatrix}$, i.e. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vérifions si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

$$\frac{2}{2} = 1 \quad \frac{1}{-1} = -1 \quad \frac{3}{-1} = -3$$

Les rapports ne sont pas égaux, donc les coordonnées des vecteurs ne sont pas proportionnelles et ainsi les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc l'affirmation 3 est fausse.

Affirmation 4

D'après la représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$, un couple de vecteurs directeur du plan $(\mathcal{P})$ est $(\vec{u}; \vec{v})$ où $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

On obtient ainsi le système
$$\begin{cases} 2 = \alpha \\ -1 = \alpha + 3\beta \\ -1 = \beta \end{cases}$$

L'égalité $\alpha + 3\beta = -1$ est vraie pour $\alpha = 2$ et $\beta = -1$, donc $\overrightarrow{AB}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Donc $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, et ainsi (AB) est parallèle à $(\mathcal{P})$.

Donc l'affirmation 4 est vraie.

Nombres complexes**8,5 points****Exercice 2****4,5 points**

Justifier soigneusement les réponses.

- Vrai ou Faux ?** Pour tout entier naturel n , $(1+i)^{4n} = (-4)^n$
- Calculer l'inverse de $z = 2 - 3i$ sous forme algébrique.
- (a) Déterminer les racines carrées de $-3 - 4i$.
(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + (1+i) = 0$

Solution:

- Calculons $(1+i)^4$

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

$$(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$$

Donc, pour tout entier naturel n , $(1+i)^{4n} = ((1+i)^4)^n = (-4)^n$. L'affirmation est vraie.

2. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-3i} &= \frac{1}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i} \\ &= \frac{2+3i}{2^2+3^2} \\ &= \frac{2+3i}{4+9} \\ &= \frac{2+3i}{13}\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{z} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

3. (a) Cherchons les racines carrées de $-3-4i$.

Posons $r = a + bi$, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $r^2 = -3-4i$.

Donc $(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -3 - 4i$

Donc, par unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe, $\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases}$.

De la deuxième équation : $ab = -2$, donc $a \neq 0$. Ainsi on peut écrire $b = -\frac{2}{a}$.

On remplace b par cette valeur dans la première équation : $a^2 - \frac{4}{a^2} = -3$.

Ainsi $a^4 + 3a^2 - 4 = 0$

Posons $X = a^2$ et résolvons l'équation $X^2 + 3X - 4 = 0$. $\Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2$,
donc $X_1 = \frac{-3+5}{2}$ et $X_2 = \frac{-3-5}{2}$, c'est-à-dire $X_1 = 1$ et $X_2 = -4$.

Or, $X = a^2$ et $a \in \mathbb{R}$, donc $X \geq 0$, ainsi la solution $X_2 = -4$ est impossible.

On en conclut que $a^2 = 1$, i.e. $a = 1$ ou $a = -1$.

- Si $a = 1$, alors $b = -2$
- Si $a = -1$, alors $b = 2$

Les racines carrées sont $1 - 2i$ et $-1 + 2i$.

(b) Considérons l'équation $z^2 - z + (1 + i) = 0$. Le discriminant associé à cette équation est

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - 4(1 + i) \\ &= 1 - 4 - 4i \\ &= -3 - 4i \\ &= (1 - 2i)^2 \text{ d'après la question précédente.}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{1 + 1 - 2i}{2} & z_2 &= \frac{1 - 1 + 2i}{2} \\ z_1 &= \frac{2 - 2i}{2} & z_2 &= \frac{2i}{2} \\ z_1 &= 1 - i & z_2 &= i\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{1 - i; i\}$.

Exercice 3**4 points**

1. Résoudre dans
- $\mathbb{C}$
- l'équation

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

2. On pose, pour tout
- $z \in \mathbb{C}$
- ,

$$f(z) = z^3 + (2 + i)z^2 + (5 + 2i)z + 5i$$

- (a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure, à déterminer.
 (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$.

Solution:

1. Considérons l'équation
- $z^2 + 2z + 5 = 0$
- . Le discriminant associé à cette équation est

$$\begin{aligned}\Delta &= 4 - 20 \\ &= -16 \\ &= (4i)^2\end{aligned}$$

Ainsi les solutions de l'équation sont

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-2 + 4i}{2} & z_2 &= \frac{-2 - 4i}{2} \\ z_1 &= -1 + 2i & z_2 &= -1 - 2i\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{-1 + 2i; -1 - 2i\}$.

2. (a) Cherchons une solution imaginaire pure de la forme
- $z = ki$
- avec
- $k \in \mathbb{R}$
- .

$$\begin{aligned}f(ki) &= (ki)^3 + (2 + i)(ki)^2 + (5 + 2i)(ki) + 5i \\ &= -k^3i - k^2(2 + i) + k(5 + 2i)i + 5i \\ &= -k^3i - 2k^2 - k^2i + 5ki - 2k + 5i \\ &= (-2k^2 - 2k) + i(-k^3 - k^2 + 5k + 5)\end{aligned}$$

$$\text{On veut que } f(ki) = 0, \text{ donc } \begin{cases} -2k^2 - 2k = 0 \\ -k^3 - k^2 + 5k + 5 = 0 \end{cases}.$$

De la première équation, on déduit $-2k(k + 1) = 0$, donc $k = 0$ ou $k = -1$.

- Si $k = 0$, $f(0) = 5i \neq 0$
- Si $k = -1$, vérifions dans la deuxième équation

$$\begin{aligned}f(-1) &= -(-1)^3 - (-1)^2 + 5(-1) + 5 \\ &= 1 - 1 - 5 + 5 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $z = -i$ est une solution de $f(z) = 0$.

(b) Puisque $-i$ est racine, on peut factoriser $f(z)$ par $z - (-i)$:

$$f(z) = (z + i)(z^2 + az + b) \text{ avec } (a; b) \in \mathbb{C}^2$$

Par division euclidienne ou identification :

$$f(z) = (z + i)(z^2 + 2z + 5)$$

D'après la question 1, $z^2 + 2z + 5 = 0$ a pour solutions $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = -1 - 2i$.

L'ensemble des solutions de $f(z) = 0$ est $\mathcal{S} = \{-i; -1 + 2i; -1 - 2i\}$.

Matrices

7 points

Exercice 4

3 points

1. Écrire la matrice carrée A d'ordre 3 telle que

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket^2, \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i < j \\ -1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

2. On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer les deux réels a et b tels que $A = aI_3 + bJ$.

(b) Exprimer J^2 en fonction de J .

(c) Est-il vrai que $A^2 = I_3 + 5J$? **Justifier.**

Solution:

1. En appliquant les règles données :

- Diagonale ($i = j$) : coefficients égaux à i (1, 2, 3)
- Au-dessus de la diagonale ($i < j$) : coefficients égaux à 0
- En-dessous de la diagonale ($i > j$) : coefficients égaux à -1

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. (a) $A = aI_3 + bJ$ signifie

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix}$$

En identifiant : $a + b = 2$ et $b = 1$, donc $a = 1$ et $b = 1$.

(b) Détaillons le calcul

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ = 3J$$

(c) On calcule $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, donc $A^2 = I_3 + 5J$, l'affirmation est vraie.

On aurait aussi pu dire que

$$\begin{aligned} A^2 &= (I_3 + J)^2 \\ &= I_3^2 + 2I_3J + J^2 \\ &= I_3 + 2J + 3J \\ &= I_3 + 5J \end{aligned}$$

Attention ! En toute généralité, $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, Ici, bien que le produit des matrices ne soit pas commutatif, on a $I_3 \times J = J \times I_3$, donc l'identité remarquable habituelle fonctionne.

Exercice 5

4 points

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et donner l'expression de A^{-1} .

2. Donner les matrices A^2 , A^3 et A^4 (on ne **détaillera pas** les calculs).

Émettre une conjecture sur l'expression de la matrice A^n , pour tout n entier naturel non nul

3. Démontrer la conjecture précédente.
4. Vérifier que l'expression de A^n en fonction de n trouvée dans la question précédente est encore valable lorsque $n = -1$.

Solution:

1. $\det(A) = 2 \times 1 - 1 \times 0 = 2 \neq 0$. Donc A est inversible.

De plus,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Enfin, $A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. **Initialisation** : Pour $n = 1$: $A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hérédité : Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \times A \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k \times 2 + (2^k - 1) \times 0 & 2^k \times 1 + (2^k - 1) \times 1 \\ 0 \times 2 + 1 \times 0 & 0 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 2^k + 2^k - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 2^{k+1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La propriété est initialisée $n = 1$ et est héréditaire. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Pour $n = -1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Avec la formule,

$$\begin{pmatrix} 2^{-1} & 2^{-1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La formule est valable pour $n = -1$.