

Devoir sur table n°10

Mercredi 18 juin 2025 - 1 h

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Géométrie dans l'espace**4,5 points****Exercice 1 : Vrai ou faux****4,5 points**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier** chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On se place dans un repère orthonormé.

On considère le plan $(\mathcal{P})$ et la droite $(\mathcal{D})$, de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 + a \\ y = -2 + a + 3b \\ z = 1 + b \end{cases} \text{ où } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

On donne les points $A(1; 1; 0)$ et $B(3; 0; -1)$.

Affirmation 1 : Le point $C(4; 3; 1)$ appartient à la droite $(\mathcal{D})$.

Affirmation 2 : La droite $(\mathcal{D})$ coupe le plan $(\mathcal{P})$ au point C de coordonnées $(4; 3; 1)$.

Affirmation 3 : Les droites (AB) et $(\mathcal{D})$ sont parallèles.

Affirmation 4 : La droite (AB) est parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

Nombres complexes**8,5 points****Exercice 2****4,5 points**

Justifier soigneusement les réponses.

1. **Vrai ou Faux ?** Pour tout entier naturel n , $(1 + i)^{4n} = (-4)^n$
2. Calculer l'inverse de $z = 2 - 3i$ sous forme algébrique.
3. (a) Déterminer les racines carrées de $-3 - 4i$.
(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + (1 + i) = 0$

Exercice 3**4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

2. On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = z^3 + (2 + i)z^2 + (5 + 2i)z + 5i$$

- (a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure, à déterminer.
- (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$.

Matrices**7 points****Exercice 4****3 points**

1. Écrire la matrice carrée A d'ordre 3 telle que

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket^2, \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i < j \\ -1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

2. On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer les deux réels a et b tels que $A = aI_3 + bJ$.
 (b) Exprimer J^2 en fonction de J .
 (c) Est-il vrai que $A^2 = I_3 + 5J$? **Justifier.**

Exercice 5**4 points**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A est inversible et donner l'expression de A^{-1} .
- Donner les matrices A^2 , A^3 et A^4 (on ne **détaillera pas** les calculs).
Émettre une conjecture sur l'expression de la matrice A^n , pour tout n entier naturel non nul
- Démontrer la conjecture précédente.
- Vérifier que l'expression de A^n en fonction de n trouvée dans la question précédente est encore valable lorsque $n = -1$.