

Devoir sur table n°9

Mercredi 14 mai 2025 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice **de type Collège** est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Questions de cours**(4 points)**

Déterminer, en justifiant clairement, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si n est un entier multiple de 18, alors 216 divise $2n^2$.

Solution: L'affirmation est vraie.

Soit n un entier multiple de 18. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 18k$.

Ainsi

$$\begin{aligned} 2n^2 &= 2(18k)^2 \\ &= 2 \times 324k^2 \\ &= 648k^2 \\ &= 216 \times (3k^2) \end{aligned}$$

On pose $\ell = 3k^2$. On sait que $k \in \mathbb{Z}$, donc $\ell \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $2n^2 = 216\ell$, avec $\ell \in \mathbb{Z}$.

Donc $2n^2$ est un multiple de 216.

2. La somme de trois entiers impairs consécutifs est divisible par 9.

Solution: L'affirmation est fausse.

Notons n le plus petit des trois entiers. Il est impair donc il s'écrit $2k + 1$, k entier. Les deux entiers impairs suivants sont $n + 2$ et $n + 4$, qui s'écrivent donc $2k + 3$ et $2k + 5$.

La somme de ces trois entiers vaut donc :

$$(2k + 1) + (2k + 3) + (2k + 5)$$

c'est-à-dire $6k + 9$. Or ce nombre n'est pas toujours divisible par 9 : par exemple, pour $k = 1$, $6k + 9 = 15$, qui n'est pas divisible par 9.

3. Il n'existe pas d'entiers relatifs x et y tels que $3x - 24y = 14$

Solution: L'affirmation est vraie.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers relatifs x et y tels que $3x - 24y = 14$. Alors $3(x - 8y) = 14$, avec k entier relatif.

On déduit qu'alors 3 divise 14, ce qui est impossible. Il n'existe donc pas d'entiers relatifs x et y tels que $3x - 24y = 14$.

4. Si n est un entier relatif, $2n^4 + 11n^2 + 12$ n'est jamais un nombre premier.

Solution: L'affirmation est vraie.

- Résolvons tout d'abord l'équation : $2x^2 + 11x + 12 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 11^2 - 4 \times 2 \times 12 = 121 - 96 = 25 = 5^2$.

L'équation a donc deux solutions réelles qui sont :

$$\frac{-11 - 5}{4} = -4 \text{ et } \frac{-11 + 5}{4} = -\frac{3}{2}.$$

Le coefficient de x^2 étant 2, on peut écrire :

Pour tout x réel, $2x^2 + 11x + 12 = 2(x + 4)\left(x + \frac{3}{2}\right)$, qu'il est plus

judicieux d'écrire ici :

$$2x^2 + 11x + 12 = (x + 4)(2x + 3)$$

- En remplaçant x par n^2 , on obtient :

Pour tout entier n , $2n^4 + 11n^2 + 12 = (n^2 + 4)(2n^2 + 3)$.

On remarque, grâce à la présence de n^2 , que chaque terme de ce produit est au moins supérieur ou égal à 3, donc ce nombre n'est pas premier.

Exercice 2 : Étude de diviseurs

(4 points)

Soit p et q deux nombres premiers tels que $1 < p < q$. On note $n = p \times q$.

- (a) Déterminer, en fonction de p et q , le nombre, la liste, puis la somme, notée S , des diviseurs positifs de n .
(b) Montrer que S est divisible par $p + 1$.
(c) Déterminer n sachant que S vaut 12.

2. L'entier p est toujours un nombre premier positif quelconque.
- (a) Déterminer l'entier, noté m , ayant quatre diviseurs positifs, et n'admettant que l'entier p comme diviseur premier.
 - (b) Déterminer, en fonction de p , la liste, puis la somme, notée S' , des diviseurs de m .
 - (c) Montrer que S' est divisible par $p + 1$.
 - (d) Déterminer m sachant que S' vaut 15.

Solution: Les entiers p et q sont premiers tels que $1 < p < q$ et $n = p \times q$.

- 1) a) $p^1 \times q^1$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de n car p et q sont premiers et distincts. Donc le nombre de diviseurs de n est : $(1 + 1) \times (1 + 1) = 4$; $D_+(n) = \{1 ; p ; q ; pq\}$.
La somme est $S = 1 + p + q + pq$.
- b) $S = 1 + p + q + pq = (1 + p) + q(1 + p) = (1 + p)(1 + q)$; $(1 + q)$ étant entier, on en déduit que S est divisible par $(p + 1)$.
- c) On doit écrire 12 sous la forme du produit de deux entiers qui suivent deux nombres premiers : La seule possibilité est $12 = 3 \times 4$ (2×6 et 12×1 ne conviennent pas) donc $p + 1 = 3$ et $q + 1 = 4$ d'où $p = 2$ et $q = 3$. Donc $\boxed{n = 6}$
- 2) a) L'entier m a le même nombre de diviseurs que n donc 4 diviseurs et il n'admet que p comme diviseur premier donc il s'écrit comme une puissance de p ; or, $4 = 3 + 1$ donc $m = p^3$.
- b) $D_+(m) = \{1 ; p ; p^2 ; p^3\}$ et $S' = 1 + p + p^2 + p^3$.
- c) $S' = 1 + p + p^2 + p^3 = (1 + p) + p^2(1 + p) = (1 + p)(1 + p^2)$
 $1 + p^2$ étant entier, S' est divisible par $(p + 1)$.
- d) $S' = 3 \times 5 = 1 \times 15$; le plus petit des deux facteurs doit être le suivant d'un nombre premier donc cela ne peut être que 3 ; donc $p = 2$ et on remarque que $5 = 2^2 + 1$. Donc $\boxed{m = 2^3 = 8}$.

Exercice 3 : Suite et divisibilité

(2 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On note S_n la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison 11 et de premier terme 1. Calculer S_n en fonction de n .
2. En déduire que $11^n + 99$ est un multiple de 10.

Solution:

1. La suite géométrique est définie par $u_1 = 1$ et pour tout $k \geq 1$, $u_{k+1} = 11 \times u_k$.
On a donc $u_k = 11^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.

La somme S_n des n premiers termes est donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n u_k \\ &= \sum_{k=1}^n 11^{k-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 11^i \end{aligned}$$

On reconnaît la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 11. En utilisant la formule de la somme des termes d'une suite géométrique $\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ pour $q \neq 1$, on obtient:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{11^n - 1}{11 - 1} \\ &= \frac{11^n - 1}{10} \end{aligned}$$

Donc $S_n = \frac{11^n - 1}{10}$.

2. D'après la question précédente, on a $S_n = \frac{11^n - 1}{10}$, ce qui peut s'écrire

$$10 \times S_n = 11^n - 1$$

On en déduit: $11^n = 10 \times S_n + 1$

Ajoutons 99 aux deux membres:

$$\begin{aligned} 11^n + 99 &= 10 \times S_n + 1 + 99 \\ &= 10 \times S_n + 100 \\ &= 10 \times (S_n + 10) \end{aligned}$$

Donc $11^n + 99 = 10 \times (S_n + 10)$, ce qui prouve que $11^n + 99$ est un multiple de 10 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 : Étude de fonctions**(10 points)****Partie A**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax + b)e^{1-x}$$

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f passe par le point $A(1; 1)$ et admette une tangente horizontale en A .

Dans toute la suite, on considérera que $a = 1$ et $b = 0$.

2. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.
3. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement cette limite.
5. Déterminer la dérivée de f .
6. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation.
7. (a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
On les notera α et β , telles que $\alpha < \beta$.
(b) Donner un encadrement de α et de β à 10^{-1} près.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}$$

Partie B

1. Comparer les fonctions h_n et g'_n , dérivée de la fonction g_n .
2. Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$, $g_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

$$\text{En déduire que, pour tout réel } x \neq 1 : h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la **partie A** par

$$f(x) = xe^{1-x}$$

En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Solution: Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{1-x}$.

1. Traduisons les hypothèses :

$$\begin{aligned} f(1) = 1 &\iff (a \times 1 + b) e^{1-1} = 1 \\ &\iff a + b = 1 \end{aligned}$$

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= ae^{1-x} - (ax + b) e^{1-x} \\ &= -((x - 1)a + b) e^{1-x} \end{aligned}$$

On veut que $f'(1) = 0$, c'est-à-dire $b = 0$.

D'après la première condition, on obtient $\boxed{(a; b) = (1; 0)}$.

2. $e^{1-x} = e \times e^{-x} = \frac{e}{e^x}$ donc $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$ (par composition).

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x} = -\infty$ (par produit). Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

4. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e \times \frac{x}{e^x} = 0$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ce qui signifie que la courbe représentant f admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 \times e^{1-x} + x(-1)e^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$

6. Pour tout réel x , $e^{1-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.

$f(1) = 1e^0 = 1$, d'où le tableau de variation ci-dessous

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1 - x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

7. On vérifie les hypothèses du théorème de la bijection, que l'on applique d'abord sur $] -\infty ; 1]$.

- f est dérivable sur $] -\infty ; 1]$, donc f est continue sur $] -\infty ; 1]$.
- D'après la question 6, f est strictement croissante sur $] -\infty ; 1]$.
- D'après la question 3, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. De plus, $f(1) = 1$.
Par stricte croissance de la fonction f sur $] -\infty ; 1]$, on a

$$\begin{aligned} f(] -\infty ; 1]) &= \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; f(1) \right] \\ &=] -\infty ; 1] \end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{1}{2} \in f(] -\infty ; 1]).$$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $] -\infty ; 1]$.

De même, vérifions les hypothèses du théorème de la bijection sur $[1 ; +\infty[$.

- f est dérivable sur $[1 ; +\infty[$, donc f est continue sur $[1 ; +\infty[$.
- D'après la question 6, f est strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$.
- D'après la question 4, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. De plus, $f(1) = 1$. Par stricte décroissance de la fonction f sur $[1 ; +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f([1 ; +\infty[) &= \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; f(1) \right[\\ &=]0 ; 1] \end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{1}{2} \in f([1 ; +\infty[)$$

Notons α et β ces deux solutions, telles que $\alpha < \beta$.

8. D'après la calculatrice, $f(0,2) \approx 0,45$ et $f(0,3) \approx 0,6$. Donc $0,2 < \alpha < 0,3$.
De même, d'après la calculatrice, $f(2,6) \approx 0,52$ et $f(2,7) \approx 0,49$.

Donc $2,6 < \beta < 2,7$.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1. Pour tout x , $g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ donc

$$g'_n(x) = 0 + 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = h_n(x)$$

Or, pour tout réel $x \neq 1$, $g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$;

g_n est une fonction rationnelle de type $\frac{u}{v}$ dont la dérivée est $\frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$\begin{aligned} h_n(x) &= g'_n(x) \\ &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

2. $(1-x)g_n(x) = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)$
 $= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$
 $-x-x^2-x^3-\cdots-x^n-x^{n+1} = 1-x^{n+1}$

On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, où $f(x) = xe^{1-x}$.

$$S_n = 1 + 2e^{-1} + \cdots + ne^{1-n} = 1 + 2e^{-1} + \cdots + n(e^{-1})^{n-1} = h_n(e^{-1}).$$

Or

$$h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

donc

$$h_n(e^{-1}) = \frac{n(e^{-1})^{n+1} - (n+1)(e^{-1})^n + 1}{(1-e^{-1})^2}$$

$$S_n = \frac{\frac{n}{e^{n+1}} - \frac{n+1}{e^n} + 1}{(1-\frac{1}{e})^2}$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissance comparée.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+$, et ainsi donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{e^{n+1}} = 0.$$

De plus, par limite de fraction rationnelle en $+\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

$$\frac{n}{e^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{e^{n+1}} ; \text{ donc par produit, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \times \frac{n+1}{e^{n+1}} = 1 \times 0 = 0.$$

$$\frac{n+1}{e^n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{n}{e^n} ; \text{ donc par produit, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \times \frac{n}{e^n} = 1 \times 0 = 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} = \frac{e^2}{(e-1)^2}$$