

Devoir sur table n°9

Mercredi 14 mai 2025 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice **de type Collège** est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Questions de cours**(4 points)**

Déterminer, en justifiant clairement, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si n est un entier multiple de 18, alors 216 divise $2n^2$.
2. La somme de trois entiers impairs consécutifs est divisible par 9.
3. Il n'existe pas d'entiers relatifs x et y tels que $3x - 24y = 14$
4. Si n est un entier relatif, $2n^4 + 11n^2 + 12$ n'est jamais un nombre premier.

Exercice 2 : Étude de diviseurs**(4 points)**

Soit p et q deux nombres premiers tels que $1 < p < q$. On note $n = p \times q$.

1.
 - (a) Déterminer, en fonction de p et q , le nombre, la liste, puis la somme, notée S , des diviseurs positifs de n .
 - (b) Montrer que S est divisible par $p + 1$.
 - (c) Déterminer n sachant que S vaut 12.
2. L'entier p est toujours un nombre premier positif quelconque.
 - (a) Déterminer l'entier, noté m , ayant quatre diviseurs positifs, et n'admettant que l'entier p comme diviseur premier.
 - (b) Déterminer, en fonction de p , la liste, puis la somme, notée S' , des diviseurs de m .
 - (c) Montrer que S' est divisible par $p + 1$.
 - (d) Déterminer m sachant que S' vaut 15.

Exercice 3 : Suite et divisibilité**(2 points)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On note S_n la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison 11 et de premier terme 1. Calculer S_n en fonction de n .
2. En déduire que $11^n + 99$ est un multiple de 10.

Exercice 4 : Étude de fonctions**(10 points)****Partie A**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax + b)e^{1-x}$$

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f passe par le point $A(1; 1)$ et admette une tangente horizontale en A .

Dans toute la suite, on considérera que $a = 1$ et $b = 0$.

2. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.
3. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement cette limite.
5. Déterminer la dérivée de f .
6. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation.
7. (a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
On les notera α et β , telles que $\alpha < \beta$.
(b) Donner un encadrement de α et de β à 10^{-1} près.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}$$

Partie B

1. Comparer les fonctions h_n et g'_n , dérivée de la fonction g_n .
2. Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$, $g_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

$$\text{En déduire que, pour tout réel } x \neq 1 : h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la **partie A** par

$$f(x) = xe^{1-x}$$

En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.