

Devoir sur table n°8

Mercredi 2 avril 2025 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice **de type Collège** est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

**Dans les exercices de géométrie on pourra
librement compléter la figure fournie dans l'énoncé.**

Exercice 1 : Calculs avec la fonction exponentielle

(4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$e^{x^2} \times e^{-1} = 1$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$e^{x^2} \leqslant (e^x)^2$$

3. Pour tout nombre réel x , on pose

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- (a) Montrer que pour tout nombre réel x :

$$(g(x))^2 - (h(x))^2 = 1$$

- (b) Montrer que pour tout nombre réel x :

$$g(2x) = 2(g(x))^2 - 1 \quad \text{et} \quad h(2x) = 2g(x) \times h(x).$$

Solution: Soit $x \in \mathbb{R}$.

1.

$$\begin{aligned} e^{x^2} \times e^{-1} = 1 &\iff e^{x^2-1} = e^0 \\ &\iff x^2 - 1 = 0 \text{ car exp est bijective.} \\ &\iff x^2 = 1 \\ &\iff x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{-1; 1\}$$

2.

$$\begin{aligned}
 e^{x^2} &\leq (e^x)^2 \iff e^{x^2} \leq e^{2x} \\
 &\iff x^2 \leq 2x \text{ car exp est strictement croissante.} \\
 &\iff x^2 - 2x \leq 0 \\
 &\iff x(x-2) \leq 0
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	0	$-$	$+$
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	$+$

Donc $\mathcal{S} = [0; 2]$.

$$\begin{aligned}
 3. \quad (a) \quad (g(x))^2 - (h(x))^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \\
 &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\
 &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
 &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} \\
 &= \frac{4}{4} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(b) Pour la première relation :

$$\begin{aligned}
 2(g(x))^2 - 1 &= 2 \times \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - 1 \\
 &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{2} - 1 \\
 &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - 2}{2} \\
 &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \\
 &= g(2x)
 \end{aligned}$$

Pour la deuxième relation :

$$\begin{aligned}
 2g(x) \times h(x) &= 2 \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
 &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2} \\
 &= \frac{e^{2x} - e^x e^{-x} + e^{-x} e^x - e^{-2x}}{2} \\
 &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\
 &= h(2x)
 \end{aligned}$$

Remarque : La question 3 parlera La trigonométrie hyperbolique est un domaine fascinant des mathématiques qui présente des analogies avec la trigonométrie classique, mais sur une hyperbole plutôt que sur un cercle.

Dans la dernière question, les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ définies sont en fait le « cosinus hyperbolique » (cosh) et le « sinus hyperbolique » (sinh). Ces fonctions sont fondamentales en trigonométrie hyperbolique, tout comme les fonctions sinus et cosinus le sont en trigonométrie classique.

La relation

$$(g(x))^2 - (h(x))^2 = 1$$

est l'équation fondamentale qui caractérise ces fonctions hyperboliques, similaire à la relation

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

pour les fonctions trigonométriques classiques.

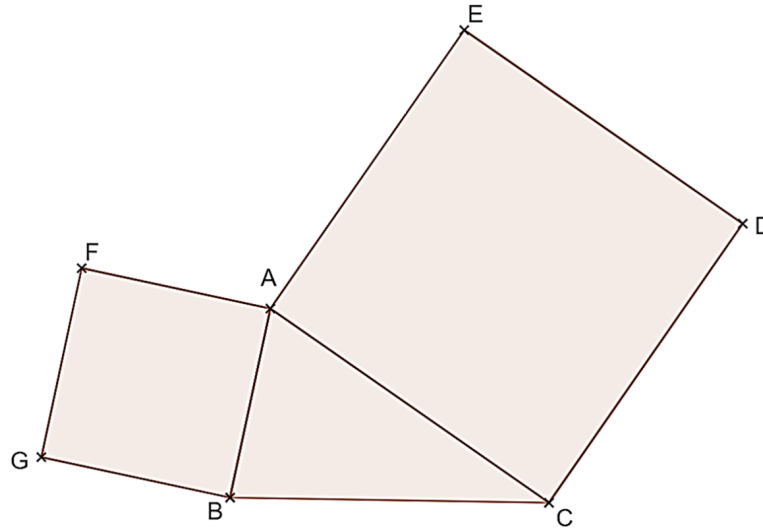
Cette identité montre que les points $(g(x), h(x))$ se situent sur une hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$, ce qui explique le nom « hyperbolique »

Les formules de duplication $g(2x)$ et $h(2x)$ sont les équivalents hyperboliques des formules de duplication trigonométriques classiques. Ces propriétés sont très utiles pour simplifier des calculs et comprendre le comportement de ces fonctions.

Cette question 3 permet donc d'explorer les propriétés algébriques des fonctions exponentielles tout en découvrant, sans le savoir explicitement, les bases de la trigonométrie hyperbolique, qui sera approfondie dans leurs études supérieures.

Exercice 2 : un peu de géométrie**(4 points)**

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle, $ACDE$ et $AFGB$ sont des carrés directs.



1. En utilisant une transformation bien choisie, démontrer que les droites (CF) et (BE) sont perpendiculaires et que les segments $[CF]$ et $[BE]$ ont la même longueur.

Solution: Notons r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ radians dans le sens direct.

- $AFGB$ est un carré direct avec A comme sommet, donc $r(F) = B$.
- De même, $ACDE$ est un carré direct avec A comme sommet, donc $r(C) = E$.

Ainsi $r((CF)) = (BE)$. Donc la droite (BE) est l'image de la droite (CF) par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{CF}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

et donc les droites (BE) et (CF) sont perpendiculaires.

De plus, l'image du segment $[CF]$ est le segment $[BE]$.

Or, la rotation est une isométrie, donc elle conserve les longueurs et ainsi

$$\boxed{CF = BE}.$$

2. On note I le milieu du segment $[CF]$ et J celui du segment $[BE]$.
Montrer que le triangle AIJ est rectangle isocèle direct en A .

Solution: Nous avons montré dans la question précédente que $B = r(F)$ et $E = r(C)$, où r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

I est le milieu de $[CF]$, donc : $r(I)$ est le milieu de $[r(C)r(F)]$.

Or $r(C) = E$ et $r(F) = B$.

Donc $r(I)$ est le milieu de $[EB]$. Par conséquent, $J = r(I)$.

Comme $J = r(I)$, les points A , I et J ne sont pas alignés et le triangle AIJ n'est pas aplati.

- Puisque $J = r(I)$, $(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- Par définition de la rotation, $AI = AJ$.

On a donc montré que le triangle AIJ est rectangle isocèle direct en A .

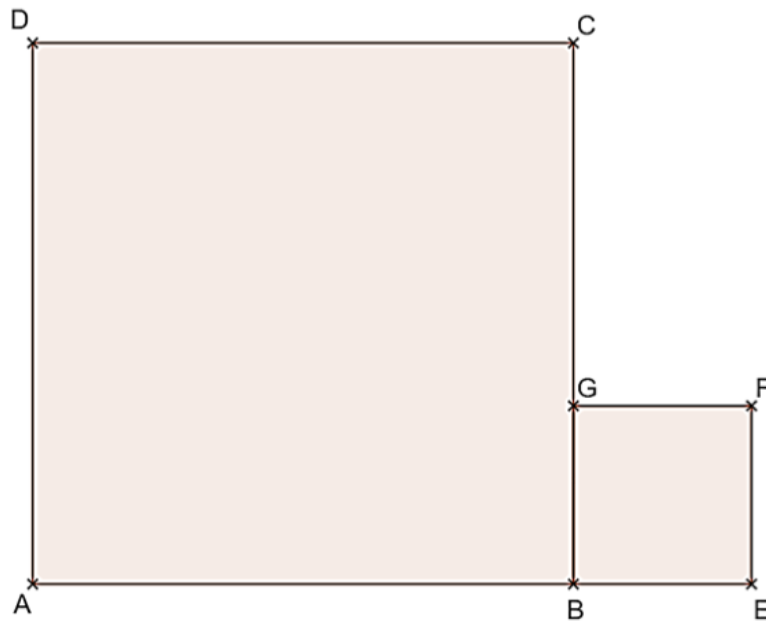
Exercice 3 : encore un peu de géométrie (homothétie)

(4 points)

Soient $ABCD$ et $BEFG$ deux carrés tels que B appartienne au segment $[AE]$ et G appartienne au segment $[BC]$.

On appelle I l'intersection des droites (AF) et (DE) .

On appelle h l'homothétie de centre I qui transforme E en D .



1. Déterminer l'image F' du point F par l'homothétie h , puis celle des droites (AB) et (BF) .
2. En déduire l'image B' du point B .
3. En déduire que les droites (AF) , (DE) et (BC) sont concourantes.

Solution:

1. **Image de F :** Une homothétie transforme une droite en une droite parallèle : $h((EF))$ est donc la droite parallèle à (EF) passant par $h(E) = D$.
 De plus, comme $ABCD$ et $BGEF$ sont des carrés, on sait que $(AB) \parallel (BC)$ et $(EF) \parallel (BG)$. Les points B , G et F sont alignés donc (BG) et (BC) sont confondues.
 Ainsi, les droites (AB) et (EF) sont toutes deux parallèles à (BC) : elles sont donc parallèles entre elles.
 On a donc $h(E) = D \in (AD)$ et $(AD) \parallel (EF)$, donc $(AD) = h((EF))$.
 Enfin, par définition d'une homothétie, I , F et $h(F)$ sont alignés.
 Donc, $h(F) \in (AD) \cap (IF)$. Or, $(AD) \cap (IF) = \{A\}$: donc $\boxed{h(F) = A}$

Image de (BF) : **Attention** On ne sait pas que $I \in (BC)$!

Dans les carrés $ABCD$ et $BEFG$, on a

$$(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{BF}) = \frac{\pi}{4} \text{ et } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$$

De plus, A , B et E sont alignés donc (AC) et (BF) forment avec (AE) des angles correspondants égaux : ces droites sont donc parallèles.
 Or, $h((BF))$ est la droite parallèle à (BF) passant par $h(F) = A$: c'est donc $\boxed{(AC)}$.

Image de (AB) : $E \in (AB)$ donc $h((AB))$ est la droite parallèle à (AB) qui contient $h(E) = D$. Or, dans le carré $ABCD$, $(AB) \parallel (AD)$. D'où, $\boxed{h((AB)) = (DC)}$.

2. D'après la question précédente, :

- $h(B) \in h((AB))$, c'est à dire $h(B) \in (CD)$
- $h(B) \in h((BF))$, c'est à dire $h(B) \in (AC)$.

Donc, $h(B) \in (CD) \cap (AC)$, c'est-à-dire $\boxed{h(B) = C}$.

3. I , B et $h(B)$ sont alignés donc $I \in (B h(B))$, c'est-à-dire $I \in (BC)$. I , en tant que centre de l'homothétie de h , appartient donc aux trois droites (DE) , (AF) et (BC) , qui sont bien concourantes.

Exercice 4 : Une étude de fonction**(8 points + 4 points bonus)****Partie A : une fonction auxiliaire g** **(5 points)**

φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2 - x)e^x - 1$.

1. Démontrer que la fonction φ est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.
2. Démontrer que, sur l'intervalle $[-2; 2]$, la fonction φ s'annule exactement en deux valeurs, que l'on nommera α et β (avec $\alpha < \beta$).
3. Déterminer un encadrement de α et de β à 10^{-1} près.
4. Étudier le signe de la fonction φ .

Partie B : étude de la fonction f **(3 points)**

1. On rappelle que la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente en 0. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x$ ne s'annule pas.

On note alors f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

2. Calculer la dérivée de f et, à l'aide des résultats de la partie A, donner le sens de variation de f .
3. (a) Montrer que $e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$.
(b) En déduire que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Partie C (Bonus) : Étude des limites de f **(4 points)**

1. (a) On considère la fonction g définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.
Étudier le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$.
(b) En déduire que pour tout x de $[0; +\infty[$, $g(x) \geq 0$.
(c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
2. Étudier les limites de la fonction f (définie dans la partie B) en $-\infty$ et en $+\infty$.
On pourra utiliser le résultat de la question précédente.

Solution: Partie A

1. $\varphi = uv - w$, avec $u(x) = 2 - x$, $v(x) = e^x$ et $w(x) = 1$. Comme u , v , et w sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, alors φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\varphi' = u'v + uv' - w'$$

Donc, pour tout réel x , $\varphi'(x) = (1 - x)e^x$. Comme pour tout réel x , $e^x > 0$, alors $\varphi'(x) > 0$ sur $] -\infty ; 1[$, $\varphi'(1) = 0$ et $\varphi'(x) < 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

2. φ est continue et strictement croissante sur $[-2 ; 1]$.

Or $\varphi(-2) = 4e^{-2} - 1$, donc $\varphi(-2) \approx -0,46$, qui est négatif, et $\varphi(1) = e - 1$, donc $\varphi(1) \approx 1,72$ qui est positif.

Donc, comme 0 est compris entre $\varphi(-2)$ et $\varphi(1)$, d'après le théorème de la bijection, alors l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[-2 ; 1]$.

De même, φ est continue et strictement décroissante sur $[1 ; 2]$. Or $\varphi(2) = -1$. Comme 0 est compris entre $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$, d'après le théorème de la bijection, alors l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[1 ; 2]$.

3. D'après la calculatrice,

- α est dans $[-1, 2 ; -1, 1]$ (d'après la calculatrice).
- β est dans $[1, 8 ; 1, 9]$.

4. Comme φ est strictement croissante sur $] -\infty ; 1]$ et $\varphi(\alpha) = 0$, alors :

- pour tout x tel que $x < \alpha$, on a $\varphi(x) < \varphi(\alpha)$, donc $\varphi(x) < 0$ sur $] -\infty ; \alpha[$
- pour tout x tel que $\alpha < x \leq 1$, on a $\varphi(x) > \varphi(\alpha)$, donc $\varphi(x) > 0$ sur $] \alpha ; 1]$

Comme φ est strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$ et $\varphi(\beta) = 0$, alors :

- pour tout x tel que $1 \leq x < \beta$, on a $\varphi(x) > \varphi(\beta)$, donc $\varphi(x) > 0$ sur $[1 ; \beta[$;
- pour tout x tel que $x > \beta$, on a $\varphi(x) < \varphi(\beta)$, donc $\varphi(x) < 0$ sur $] \beta ; +\infty[$.

En résumé :

- $\varphi(x) < 0$ pour tout $x \in] -\infty ; \alpha[$
- $\varphi(\alpha) = 0$
- $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in] \alpha ; \beta[$
- $\varphi(\beta) = 0$
- $\varphi(x) < 0$ pour tout $x \in] \beta ; +\infty[$.

Partie B

1. La fonction $h : x \mapsto e^x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $h'(x) = e^x - 1$.

Comme $h'(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$ et $h'(0) = 0$, alors h est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$.

Comme $h'(x) > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ et $h'(0) = 0$, alors h est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

La fonction h admet donc un minimum, pour $x = 0$, qui vaut $h(0) = 1$. Donc pour tout x , $h(x) \geq 1$, donc $h(x) > 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. $f = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = e^x - x$.

Comme u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x - 1$. Donc, pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{\varphi(x)}{(e^x - x)^2}$$

Comme, pour tout réel x , $(e^x - x)^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $\varphi(x)$. Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty; \alpha]$, f est strictement croissante sur $[\alpha; \beta]$ et f est strictement décroissante sur $[\beta; +\infty[$.

3. (a) Comme $\varphi(\alpha) = 0$, on a : $(2 - \alpha)e^\alpha - 1 = 0$, c'est-à-dire $e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$.

(b) Comme $f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha}$, alors

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\frac{1}{2-\alpha} - 1}{\frac{1}{2-\alpha} - \alpha} \\ &= \frac{1 - (2-\alpha)}{1 - \alpha(2-\alpha)} \\ &= \frac{2-\alpha}{1 - \alpha(2-\alpha)} \\ &= \frac{2-\alpha}{\alpha-1} \\ &= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{1}{\alpha-1} \end{aligned}$$

Partie C : (Bonus)

1. (a) La fonction g , somme de deux fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$, est donc dérivable sur $[0; +\infty[$. Pour tout réel x , $g'(x) = e^x - x$. Comme, pour tout réel x , $e^x > x$, on en déduit que pour tout réel x positif ou nul, $g'(x) > 0$ et que la fonction g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

(b) On sait que $g(0) = 1$, donc que pour tout x , $g(x) \geq 1$ et donc $g(x) \geq 0$.

- (c) La relation précédente traduit que, pour tout réel $x > 0$, $e^x \geq \frac{x^2}{2}$. En divisant chaque membre par x (qui est strictement positif), on obtient que : pour tout réel $x > 0$, $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$. De plus : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = +\infty$. Donc, d'après le théorème de comparaison, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc, par limite de somme et de quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. La courbe représentative de f admet donc pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Donc, par limite d'inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Donc, par limite de somme, puis de quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. La courbe représentative de f admet donc pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.