

Devoir sur table n°8

Mercredi 2 avril 2025 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice **de type Collège** est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

**Dans les exercices de géométrie on pourra
librement compléter la figure fournie dans l'énoncé.**

Exercice 1 : Calculs avec la fonction exponentielle**(4 points)**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$e^{x^2} \times e^{-1} = 1$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$e^{x^2} \leqslant (e^x)^2$$

3. Pour tout nombre réel x , on pose

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- (a) Montrer que pour tout nombre réel x :

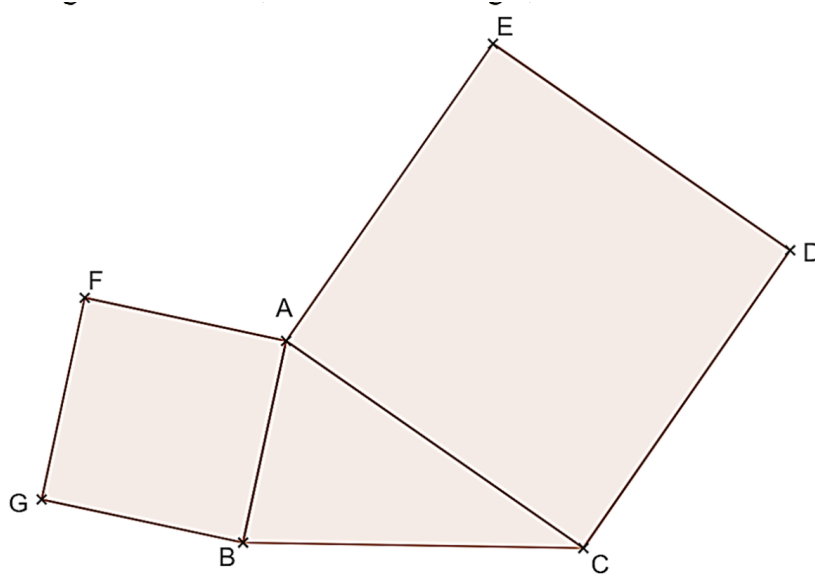
$$(g(x))^2 - (h(x))^2 = 1$$

- (b) Montrer que pour tout nombre réel x :

$$g(2x) = 2(g(x))^2 - 1 \quad \text{et} \quad h(2x) = 2g(x) \times h(x).$$

Exercice 2 : un peu de géométrie**(4 points)**

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle, $ACDE$ et $AFGB$ sont des carrés directs.



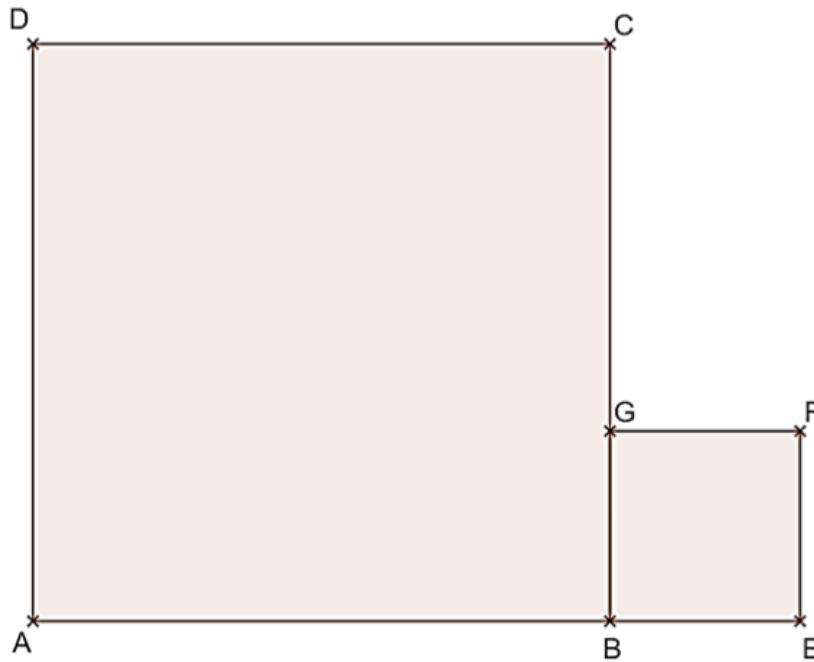
1. En utilisant une transformation bien choisie, démontrer que les droites (CF) et (BE) sont perpendiculaires et que les segments $[CF]$ et $[BE]$ ont la même longueur.
2. On note I le milieu du segment $[CF]$ et J celui du segment $[BE]$.
Montrer que le triangle AIJ est rectangle isocèle direct en A .

Exercice 3 : encore un peu de géométrie (homothétie)**(4 points)**

Soient $ABCD$ et $BEFG$ deux carrés tels que B appartienne au segment $[AE]$ et G appartienne au segment $[BC]$.

On appelle I l'intersection des droites (AF) et (DE) .

On appelle h l'homothétie de centre I qui transforme E en D .



1. Déterminer l'image F' du point F par l'homothétie h , puis celle des droites (AB) et (BF) .
2. En déduire l'image B' du point B .
3. En déduire que les droites (AF) , (DE) et (BC) sont concourantes.

Exercice 4 : Une étude de fonction**(8 points + 4 points bonus)****Partie A : une fonction auxiliaire g** **(5 points)**

φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2 - x)e^x - 1$.

1. Démontrer que la fonction φ est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.
2. Démontrer que, sur l'intervalle $[-2; 2]$, la fonction φ s'annule exactement en deux valeurs, que l'on nommera α et β (avec $\alpha < \beta$).
3. Déterminer un encadrement de α et de β à 10^{-1} près.
4. Étudier le signe de la fonction φ .

Partie B : étude de la fonction f **(3 points)**

1. On rappelle que la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente en 0. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x$ ne s'annule pas.

On note alors f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

2. Calculer la dérivée de f et, à l'aide des résultats de la partie A, donner le sens de variation de f .
3. (a) Montrer que $e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$.
(b) En déduire que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Partie C (Bonus) : Étude des limites de f **(4 points)**

1. (a) On considère la fonction g définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.
Étudier le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$.
(b) En déduire que pour tout x de $[0; +\infty[$, $g(x) \geq 0$.
(c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
2. Étudier les limites de la fonction f (définie dans la partie B) en $-\infty$ et en $+\infty$.
On pourra utiliser le résultat de la question précédente.