Devoir sur table n°7

Mercredi 12 mars 2025 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice **de type Collège** est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Questions de cours (6 points)

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

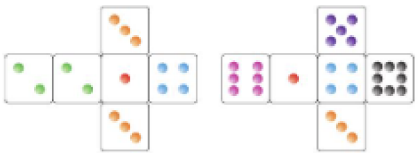
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ m & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

   Quelle valeur doit on donner au nombre réel m pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?

2. Montrer que l'équation $x^{2025} + x + 1 = 0$ admet une solution réelle.

3. Vrai ou Faux ? Il existe une fonction f continue sur l'intervalle $I = [1\,;\,+\infty[$ et telle que $f(I) =]-\infty\,;\,1[\cup]2\,;\,+\infty[$. **Justifier votre réponse.**

4. Les dés de Sicherman sont des dés cubiques dont les faces sont numérotées différemment des dés habituels : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 et 4 pour l'un et 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 et 8 pour l'autre. Voici deux patrons possibles de tels dés.



   On lance les deux dés de Sicherman. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus. Établir la loi de probabilité de X.

5. Un étudiant doit réussir un examen qui comporte une épreuve écrite et une épreuve orale. La probabilité qu'il réussisse l'épreuve écrite est de $0,7$ celle qu'il réussisse l'épreuve orale est de $0,6$ et celle qu'il réussisse les deux est de $0,5$.

   (a) Soit A l'événement « l'étudiant réussit au moins une épreuve ». Calculer la probabilité de l'événement A.

   (b) Soit B l'événement « L'étudiant réussit l'épreuve orale mais pas l'épreuve écrite ». Calculer la probabilité de l'événement B.

   (c) Soit C l'événement « L'étudiant loupe les deux épreuves ». Calculer la probabilité de l'événement C.

Solution:

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en tant que fonction dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = x - 1$.

   Donc $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 1$. Ainsi, pour $m = 1$, on a $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 1$.

   On en conclut que, $\boxed{\text{pour } m = 1}$, la fonction est continue en -1, et puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et est alors continue sur $\mathbb{R}$.

2. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^{2025} + x + 1$.

   - g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc g est continue sur $\mathbb{R}$.
   - $g(-1) = -1$ et $g(0) = 1$ et 0 est compris entre $g(-1)$ et $g(1)$.

   Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,
   $\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet au moins une solution réelle}}$.

3. Supposons par l'absurde qu'il existe une telle fonction f. Ainsi, l'image par f d'un intervalle est un intervalle. Or, I est un intervalle et $f(I)$ est une réunion d'intervalles disjoints. Donc $f(I)$ n'est pas un intervalle. D'où contradiction. Ainsi $\boxed{\text{l'affirmation est fausse}}$.

4. Il y a 36 résultats possibles, qui sont les couples que l'on peut former avec la face du premier dé et la face du deuxième. Il peut éventuellement y avoir des répétitions. On résume cela sous la forme du tableau suivant :

dé 1 \ dé 2	1	3	4	5	6	8
1	(1 ; 1)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)	(1 ; 8)
2	(2 ; 1)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)	(2 ; 8)
2	(2 ; 1)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)	(2 ; 8)
3	(3 ; 1)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)	(3 ; 8)
3	(3 ; 1)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)	(3 ; 8)
4	(4 ; 1)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)	(4 ; 8)

   $X(\Omega) = \{2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\,;\,11\,;\,12\}$.

   On a alors le tableau suivant qui nous donne la loi de probabilité de X :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{1}{32}$

Remarque : Ce tableau est le même que celui de la loi de probabilité de Y, qui est la variable aléatoire qui donne la somme des points obtenus pour un lancé de dés « ordinaires ». En effet, les dés de Sicherman sont des dés affichant des nombres entiers différents de ceux de dés ordinaires, mais dont la somme possède néanmoins une loi de probabilité identique à Y.

5. Notons O l'événement « l'étudiant réussit l'épreuve orale » et E l'événement « l'étudiant réussit l'épreuve écrite ».

   (a) Si l'étudiant réussit au moins une épreuve, alors il réussit l'épreuve orale ou l'épreuve écrite :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E \cup O) \\ &= P(E) + P(O) - P(E \cap O) \\ &= 0,7 + 0,6 - 0,5 \\ &= 0,8 \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{P(A) = 0,8}$.

   (b)

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(O \cap \overline{E}\right) \\ &= P(O \setminus (O \cap E)) \\ &= 0,6 - 0,5 \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{P(B) = 0,1}$.

   (c) Si l'étudiant loupe les deux épreuves, alors il ne réussit ni l'épreuve orale ni l'épreuve écrite :

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\overline{E} \cap \overline{O}\right) \\ &= P\left(\overline{E \cup O}\right) \text{ d'après l'une des lois de De Morgan} \\ &= 1 - P(E \cup O) \\ &= 1 - 0,8 \\ &= 0,2 \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{P(C) = 0,2}$.

Exercice 2 : Un jeu d'arcades (4,5 points)
Un joueur participe à un jeu de loterie dans une arcade. La machine contient une carte spéciale et n tickets numérotés de 1 à n.

À chaque tour, le joueur appuie sur un bouton, et la machine tire au hasard, successivement et avec remise, deux éléments parmi les $n+1$ disponibles.

L'ensemble des choix possibles est modélisé par un espace de probabilité équiprobable Ω.

1. Déterminer le nombre total de choix possibles $\text{card}(\Omega)$ en fonction de n.
2. Exprimer en fonction de n la probabilité des événements suivants :

   M : « Le joueur obtient deux fois le même type de contenu (deux tickets ou deux fois la carte spéciale) ».

   N : « Le joueur obtient des contenus de types différents (un ticket et la carte spéciale) ».

   On considère un système de récompense avec les règles suivantes :

   - Le joueur **perd** $(n+1)^2$ points si M se réalise.
   - Le joueur **gagne** $2(n+1)^2$ points sinon.
3. On définit X comme la variable aléatoire correspondant au gain (positif ou négatif) du joueur.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Montrer que $E(X) = -n^2 + 4n - 1$.
   (c) Pour quelles valeurs de n ce système est-il avantageux pour le joueur ?
   (d) Si le joueur peut choisir le nombre de tickets dans la machine, que doit-il répondre ?

Solution:

1. Une issue est un couple de deux cartes. Chaque carte est choisie au hasard parmi $(n+1)$ cartes. Il y a donc $(n+1)^2$ issues et $\text{card}(\Omega) = (n+1)^2$.
2. M est réalisé par :
   - le couple constitué de deux fois la carte spéciale,
   - les n^2 couples de deux cartes choisies parmi les n tickets numérotés.

   Il y a donc $1 + n^2$ issues réalisant l'événement M.
   D'après la loi de Laplace,

$$\boxed{P(M) = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}}$$

3. N est réalisé par
   - les n couples dans lesquels le premier élément est la carte spéciale et le second un ticket numéroté.
   - les n couples dans lesquels le premier élément est un ticket numéroté et le second la carte spéciale.

   On a donc
   $$\boxed{P(N) = \frac{2n}{(n+1)^2}}$$

4. (a) X prend
   - la valeur $-(n+1)^2$ si M se réalise : la probabilité correspondante, $P(X = (n+1)^2)$ vaut $P(M)$.
   - la valeur $2(n+1)^2$ si N se réalise : la probabilité correspondante, $P(X = (n+1)^2)$ vaut donc $P(N)$.

   D'où le tableau donnant la loi de probabilité de X:

x_i	$-(n+1)^2$	$2(n+1)^2$
$P(X = x_i)$	$\frac{n^2+1}{(n+1)^2}$	$\frac{2n}{(n+1)^2}$

   (b) Par définition
   $$E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i P(X = x_i) = -(n+1)^2 \times \frac{n^2+1}{(n+1)^2} + 2(n+1)^2 \times \frac{2n}{(n+1)^2}$$
   On obtient bien $\boxed{E(X) = -n^2 - 1 + 4n}$.

   (c) Le système est avantageux pour le joueur joueur si et seulement si $E(X) > 0$.
   On résout dans $\mathbb{R}$ $-t^2 + 4t - 1 = 0$ $(*)$.
   $\Delta = 4^2 - 4 = 12$. L'équation $(*)$ a deux solutions :
   $$t_1 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{-2} = 2 + \sqrt{3} \text{ et } t_2 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{-2} = 2 - \sqrt{3}.$$
   Le trinôme $-t^2 + 4t - 1$ est positif pour tout $t \in [2 - \sqrt{3}\,;\, 2 + \sqrt{3}]$.
   Les entiers naturels pour lesquels $-n^2+4n-1 \geqslant 0$ sont les entiers naturels de $[2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]$.

Conclusion : le jeu est avantageux pour le joueur si et seulement si $\boxed{n \in \{1;2;3\}}$

(d) Le joueur veut maximiser son gain.
Or, le trinôme $-t^2+4t+1$ est maximal pour $t = \dfrac{-4}{2\times(-1)} = 2$ (car le coefficient de t^2 est négatif).
En choisissant $\boxed{n=2}$, l'espérance de gain sera maximale. Elle vaudra alors $-2^2+4\times 2-1 = 3$ points.

Exercice 3 : Algorithmique (1,5 points)

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On a définit une variable X tel que $X(\Omega) = \{x_1\,;\,x_2\,;\,\ldots\,;\,x_N\}$, où N est un entier supérieur ou égal à 1. On note, pour tout entier k compris entre 1 et N, $p_k = P(X = x_k)$. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche l'espérance de la variable aléatoire X après l'avoir calculée.

```
E ⟵ .....
Pour k variant de ..... à ..... :
      Lire x_k
      Lire p_k
      E ⟵ ..................
Afficher .....
```

Solution:

```
E ⟵ 0
Pour k variant de 1 à N :
      Lire x_k
      Lire p_k
      E ⟵ E + x_k × p_k
Afficher E
```

Exercice 4 : Une étude de fonctions (8 points)
Partie A :
On note g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = -2x^3+9x^2-10x+4$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$
2. Étudier les variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$
3. Établir le tableau de variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$

4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;\,+\infty[$.

   Dans toute la suite, on admet que cette solution est unique et on la note α.

   (b) À la calculatrice, établir un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.

   (c) Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Partie B :

On note $\mathcal{A}$ la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\mathcal{A}(x) = -x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 8x$$

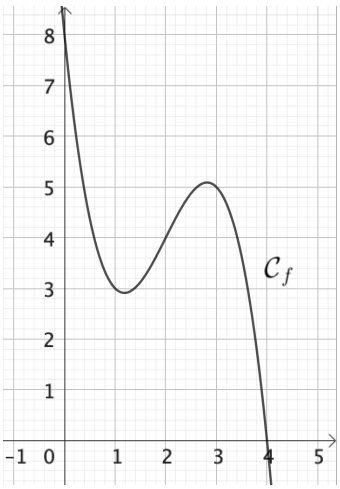
1. Déterminer l'expression de $\mathcal{A}'(x)$ pour tout $x \in [0;+\infty[$
2. Déduire de la partie A les variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie C :

On note f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 8$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
La figure est donnée ci-contre .
Pour tout réel de l'intervalle $]0\,;\,4[$, on note M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x, P le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et Q le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



1. Exprimer l'aire du quadrilatère $OPMQ$ en fonction de x.
2. Démontrer que cette aire est maximale lorsque $x = \alpha$, α étant le réel défini dans la partie A.
3. On considère ici le point M de $\mathcal{C}$ d'abscisse α. P et Q sont les projetés orthogonaux de M sur les axes du repère.
   La tangente $\mathcal{T}$ en M à $\mathcal{C}$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Solution:

1. g est un polynôme donc g a la même limite en $+\infty$ que son monôme de plus haut degré $-2x^3$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
2. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car g est une fonction polynôme et pour tout $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = -6x^2 + 18x - 10 = 2(-3x^2 + 9x - 5)$$

$\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times 5 = 21$. L'équation $g'(x) = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}_+$

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{21}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{9 + \sqrt{21}}{6}$$

Le signe de $g'(x)$ est donc le suivant :

$$\begin{cases} g'(x) < 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < x_1 \\ g'(x) > 0 & \text{si} \quad x_1 < x < x_2 \\ g'(x) < 0 & \text{si} \quad x_2 < x \end{cases}$$

On en déduit que g est

- strictement décroissante sur $[0\,;\, x_1]$,
- strictement croissante sur $[x_1\,;\, x_2]$
- strictement décroissante sur $[x_2\,;\, +\infty[$

De plus,

$$g(0) = 4 \quad g(x_1) = \frac{45 - 7\sqrt{21}}{18} \quad g(x_2) = \frac{45 + 7\sqrt{21}}{18}$$

3.

x	0		$\frac{9-\sqrt{21}}{6}$		$\frac{9+\sqrt{21}}{6}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	4	↘	$\frac{45-7\sqrt{2}}{18}$	↗	$\frac{45-7\sqrt{2}}{18}$	↘	$-\infty$

4. (a) g est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $g(0) = 4$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g atteint toutes les valeurs de l'intervalle $]-\infty\,;\, 4]$. Comme $0 \in]-\infty; 4]$, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}_+$.

   (b) A la calculatrice, $f(3) = 1$ et $f(3,1) \approx -0,092$ donc $\boxed{3 < \alpha < 3,1}$.

   (c) On sait que g est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, d'après l'étude des variations de g, $g(0) > 0$, g s'annule exactement une fois en α et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. On en déduit que :

$$\begin{cases} g(x) > 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \alpha \\ g(x) < 0 & \text{si} \quad \alpha < x \end{cases}$$

Partie B

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\mathcal{A}'(x) = -4x^3 + 18x^2 - 20x + 8$$

2. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}'(x) = 2g(x)$.
D'après la question 4.c) de la partie A, le signe de $\mathcal{A}'(x)$ est le suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{A}'(x) > 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \alpha \\ \mathcal{A}'(x) < 0 & \text{si} \quad \alpha < x \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ est donc strictement croissante sur $[0\,;\,\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$. De plus, $\mathcal{A}(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{A}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^4 = -\infty$ (car $\mathcal{A}$ est une fonction polynôme).

Partie C

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $M(x; f(x)$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x.
Par définition, $O(0\,;\,0)$, $P(x\,;\,0)$ et $Q(0\,;\,f(x)$.
Enfin, comme le repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé, le quadrilatère $OPMQ$ est un rectangle, dont l'aire vaut

$$OP \times OQ = x \times f(x)$$

On remarque que $x \times f(x)$ est égal à $\boxed{\mathcal{A}(x)}$

2. On utilise la partie B. $\mathcal{A}$ est est strictement croissante sur $[0\,;\,\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$. Elle admet donc un maximum en $x = \alpha$, égal à $\mathcal{A}(\alpha)$.

3. Soit $\alpha > 0$. Le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}_\alpha$ à $\mathcal{C}$ en $M\,(\alpha\,;\,f(\alpha))$ est $f'(\alpha)$.
Le coefficient directeur de (PQ) vaut

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(\alpha)}{-\alpha}$$

(PQ) et $\mathcal{T}_\alpha$ sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux, c'est-à-dire :

$$f'(\alpha) = -\frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

c'est-à-dire

$$\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = 0$$

Calculons $\alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$:

$$\begin{aligned}\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) &= \alpha(-3\alpha^2 + 12\alpha - 10\alpha) - \alpha^3 + 6\alpha^2 - 10\alpha + 8 \\ &= -4\alpha^3 + 18\alpha^2 - 20\alpha + 8 \\ &= 2g(\alpha)\end{aligned}$$

Or, α vérifie par définition $g(\alpha) = 0$.
Ainsi, on a bien $\alpha f'(\alpha)+f(\alpha) = 0$, ce qui montre que $\boxed{(PQ) \text{ et } \mathcal{T}_\alpha \text{ sont parallèles}}$.