

Devoir sur table n°7

Mercredi 12 mars 2025 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice **de type Collège** est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

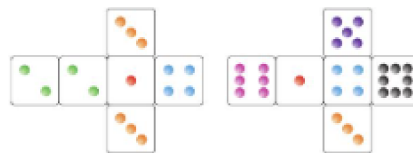
Exercice 1 : Questions de cours (6 points)

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ m & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Quelle valeur doit on donner au nombre réel m pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?

2. Montrer que l'équation $x^{2025} + x + 1 = 0$ admet une solution réelle.
3. Vrai ou Faux ? Il existe une fonction continue sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$ et telle que $f(I) =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$. **Justifier votre réponse.**
4. Les dés de Sicherman sont des dés cubiques dont les faces sont numérotées différemment des dés habituels: 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 et 4 pour l'un et 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 et 8 pour l'autre. Voici deux patrons possibles de tels dés.



On lance les deux dés de Sicherman. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus. Établir la loi de probabilité de X .

5. Un étudiant doit réussir un examen qui comporte une épreuve écrite et une épreuve orale. La probabilité qu'il réussisse l'épreuve écrite est de 0,7 celle qu'il réussisse l'épreuve orale est de 0,6 et celle qu'il réussisse les deux est de 0,5.
- (a) Soit A l'événement « l'étudiant réussit au moins une épreuve ». Calculer la probabilité de l'événement A .
- (b) Soit B l'événement « L'étudiant réussit l'épreuve orale mais pas l'épreuve écrite ». Calculer la probabilité de l'événement B .
- (c) Soit C l'événement « L'étudiant loupe les deux épreuves ». Calculer la probabilité de l'événement C .

Exercice 2 : Un jeu d'arcades (4,5 points)

Un joueur participe à un jeu de loterie dans une arcade. La machine contient une carte spéciale et n tickets numérotés de 1 à n .

À chaque tour, le joueur appuie sur un bouton, et la machine tire au hasard, successivement et avec remise, deux éléments parmi les $n + 1$ disponibles.

L'ensemble des choix possibles est modélisé par un espace de probabilité équiprobable Ω .

1. Déterminer le nombre total de choix possibles $\text{card}(\Omega)$ en fonction de n .

2. Exprimer en fonction de n la probabilité des événements suivants :

M : « Le joueur obtient deux fois le même type de contenu (deux tickets ou deux fois la carte spéciale) ».

N : « Le joueur obtient des contenus de types différents (un ticket et la carte spéciale) ».

On considère un système de récompense avec les règles suivantes :

- Le joueur **perd** $(n + 1)^2$ points si M se réalise.
- Le joueur **gagne** $2(n + 1)^2$ points sinon.

3. On définit X comme la variable aléatoire correspondant au gain (positif ou négatif) du joueur.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X .

(b) Montrer que $E(X) = -n^2 + 4n - 1$.

(c) Pour quelles valeurs de n ce système est-il avantageux pour le joueur ?

(d) Si le joueur peut choisir le nombre de tickets dans la machine, que doit-il répondre ?

Exercice 3 : Algorithmique (1,5 points)

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On a défini une variable X tel que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_N\}$, où N est un entier supérieur ou égal à 1. On note, pour tout entier k compris entre 1 et N , $p_k = P(X = x_k)$. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche l'espérance de la variable aléatoire X après l'avoir calculée.

```
E ← .....
Pour k variant de ..... à ..... :
    Lire x_k
    Lire p_k
    E ← .....
Afficher .....
```

Exercice 4 : Une étude de fonctions (8 points)**Partie A :**

On note g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -2x^3 + 9x^2 - 10x + 4$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$
2. Étudier les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$
3. Établir le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$
4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0; +\infty[$.

Dans toute la suite, on admet que cette solution est unique et on la note α .

- (b) A la calculatrice, établir un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .
- (c) Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x .

Partie B :

On note $\mathcal{A}$ la fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par :

$$\mathcal{A}(x) = -x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 8x$$

1. Déterminer l'expression de $\mathcal{A}'(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$
2. Dédurre de la partie A les variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $[0; +\infty[$.

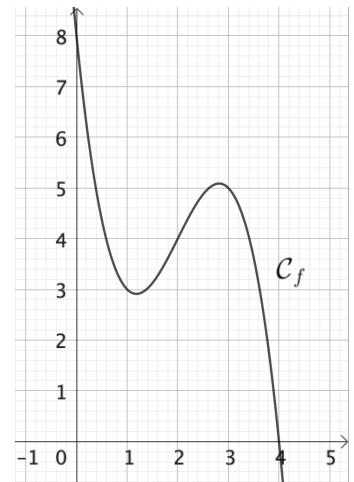
Partie C :

On note f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 8$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La figure est donnée ci-contre .

Pour tout réel de l'intervalle $]0; 4[$, on note M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x , P le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et Q le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



1. Exprimer l'aire du quadrilatère $OPMQ$ en fonction de x .
2. Démontrer que cette aire est maximale lorsque $x = \alpha$, α étant le réel défini dans la partie A.
3. On considère ici le point M de $\mathcal{C}$ d'abscisse α . P et Q sont les projetés orthogonaux de M sur les axes du repère.
La tangente $\mathcal{T}$ en M à $\mathcal{C}$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?