

Devoir sur table n°6

Mercredi 6 février 2025 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice **de type Collège** est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

1. On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) vérifiant les affirmations suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n \leq w_n$

Dire si chacune des affirmations est vraie ou fausse, en justifiant :

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$
- (d) La suite (v_n) n'a pas de limite.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 500$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,5u_n$

Parmi les affirmations suivantes, indiquer celles qui sont vraies, en justifiant **brièvement** :

- (a) Il existe un nombre entier naturel n tel que $u_n < 100$.
- (b) Pour tout nombre entier naturel n , $u_n < 100$.
- (c) Il existe un nombre entier naturel p tel que $u_p = 0$.
- (d) Il existe un nombre entier naturel p tel que, pour tout nombre entier naturel $n \geq p$, $u_n < 5$.

Solution:

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. u_n s'écrit :

$$u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2} = \frac{2n^2 \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)}{n^2} = 2 \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)$$

Or, on sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Donc, par combinaison linéaire, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$.
De même, w_n s'écrit :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{2n^2 + 3}{n^2} = \frac{2n^2 \left(1 + \frac{3}{2n^2}\right)}{n^2} \\ &= 2 \left(1 + \frac{3}{2n^2}\right) \end{aligned}$$

Donc, par limite de somme et produit, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 2$.

D'après le théorème des gendarmes, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, on a également

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2.$$

(a) et (b) sont vraies et (c) et (d) sont fausses.

2. (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_0 = 500$.
 $0 < q < 1$ donc (u_n) converge vers 0.

Ainsi, (a) et (d) sont vraies.

(b) est fausse. On peut donner comme contre-exemple $u_0 = 500$.

(c) est fausse. En effet, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On peut montrer cela par récurrence.

Exercice 2 : Un raisonnement par récurrence avec des sommes (3 points)

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^n k(k-1)$$

Ainsi $S_1 = 0$ et $S_2 = 2$.

1. Déterminer S_3 en détaillant les calculs.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$

Solution:

$$1. S_3 = \sum_{k=1}^3 k(k-1) = 1 \times (1-1) + 2 \times (2-1) + 3 \times (3-1) = 0 + 2 + 6 = 8$$

$$2. \text{ Soit } \mathcal{P}_n \text{ la propriété dépendant de l'entier } n : \ll S_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \gg.$$

Initialisation $S_1 = 0$ et $\frac{1(1-1)(1+1)}{3} = 0$ donc $\boxed{\mathcal{P}_1 \text{ est vraie}}$.

Hérédité Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain n . Montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

L'hypothèse de récurrence assure que :

$$S_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)n \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{3} + (n+1)n \\ &= n(n+1) \left(\frac{n-1}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie}}$.

Conclusion $\mathcal{P}_1$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 3 : Suites et algorithmique (6,5 points)

On considère la suite numérique (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \text{ et } v_0 = 1.$$

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite de v_0 à v_n . Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel, en justifiant la réponse :

Algorithme A

```

Lire n
v ← 1
Pour i allant de 0 à n
    v ← 9/(6 - v)
Afficher v

```

Algorithme B

```

Lire n
Pour i allant de 0 à n
    v ← 1
    Afficher v
    v ← 9/(6 - v)

```

Algorithme C

```

Lire n
v ← 1
Pour i allant de 0 à n
    Afficher v
    v ← 9/(6 - v)

```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.
3. Le but de cette question est d'étudier la suite (v_n) . On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n , par $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.
- (a) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
- (b) En déduire l'expression de w_n , puis celle de v_n , en fonction de n .
- (c) Déterminer les limites éventuelles de (w_n) et de (v_n)

Solution:

1. Dans l'algorithme A, le programme effectue un unique affichage, il ne peut donc pas être le bon.

Dans l'algorithme B, la valeur de v est remise à 1 à chaque boucle ; le programme affiche donc 1 à chaque étape.

L'algorithme C est correct

2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété dépendant de l'entier n : « $0 < v_n < 3$ ».

Initialisation $v_0 = 1$ et $0 < 1 < 3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain n .

Montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

L'hypothèse de récurrence assure que :

$$0 < v_n < 3$$

i.e.

$$-3 < -v_n < 0$$

i.e.

$$3 < 6 - v_n < 6$$

i.e.

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3}$$

i.e.

$$\frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3}$$

i.e.

$$\frac{9}{6} < v_{n+1} < 3$$

Or, $0 < \frac{9}{6}$, ainsi

$$0 < v_{n+1} < 3$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie.}}$

Conclusion $\mathcal{P}_0$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} - 3 = \frac{9}{6 - v_n} - 3 = \frac{9 - 18 + 3v_n}{6 - v_n} = \frac{-9 + 3v_n}{6 - v_n} = \frac{3(v_n - 3)}{6 - v_n}$$

Donc,

$$w_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1} - 3} = \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)}.$$

On calcule $w_{n+1} - w_n$:

$$w_{n+1} - w_n = \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)} - \frac{1}{v_n - 3} = \frac{1}{v_n - 3} \left(\frac{6 - v_n - 3}{3} \right) = \frac{1}{v_n - 3} \left(\frac{3 - v_n}{3} \right)$$

d'où finalement $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{3}$. Ceci est vrai pour tout n donc (w_n)

est une suite arithmétique de raison $r = -\frac{1}{3}$.

(b) Le premier terme de (w_n) est $w_0 = \frac{1}{v_0 - 3} = \frac{1}{1 - 3} = -\frac{1}{2}$.

Comme (w_n) est arithmétique, w_n admet l'expression suivante :

$$w_n = w_0 + nr \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

i.e.

$$w_n = -\frac{1}{2} - \frac{n}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(c) (w_n) est une suite arithmétique de raison strictement négative, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = -\infty$.

Puis, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{w_n} + 3$.

Ainsi, par limite d'inverse et de somme, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 3$.

Exercice 4 : Trigonométrie (7,5 points)

On appelle *triangle trigonométrique* (noté $\mathcal{T}$) tout triangle dont les mesures des côtés sont trois entiers consécutifs et tel que l'angle opposé au plus grand côté est le double de l'angle opposé au plus petit côté. On va montrer qu'un tel triangle existe et qu'il est unique (plus précisément que tous ces triangles ont les mêmes dimensions). Pour cela, on note n la longueur du plus petit côté et α celle de l'angle opposé au plus petit côté.

1. Montrer que, pour tout réel x ,

$$\sin(3x) = (4(\cos x)^2 - 1) \sin x$$

2. (a) Montrer que, si un triangle $\mathcal{T}$ existe, alors

$$\frac{n}{\sin(\alpha)} = \frac{n+1}{\sin(3\alpha)} = \frac{n+2}{\sin(2\alpha)}$$

- (b) En déduire que, si un triangle $\mathcal{T}$ existe, alors $2\cos(\alpha) = \frac{n+2}{n}$.

- (c) Déduire de la question 1 que, si un triangle $\mathcal{T}$ existe, alors $4\cos^2(\alpha) = \frac{2n+1}{n}$

3. (a) En déduire que : $n^2 - 3n - 4 = 0$

- (b) Montrer qu'il existe un unique entier positif n_0 tel que $(n_0)^2 - 3n_0 - 4 = 0$.

- (c) Vérifier qu'à cet entier n_0 correspond bien un triangle $\mathcal{T}$.

Solution:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On utilise d'abord la formule d'addition :

$$\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x$$

Ensuite, on remplace $\sin 2x$ et $\cos 2x$ en utilisant les formules de duplication :

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin x (2\cos^2 x - 1) + 2\sin x \cos^2 x \\ &= 4\cos^2 x \sin x - \sin x \\ &= (4\cos^2 x - 1) \sin x \end{aligned}$$

2. (a) D'après l'énoncé, l'angle de mesure α est opposé au côté de mesure n et l'angle de mesure 2α est opposé au côté de mesure $n+2$. D'après la loi des sinus, on a alors dans le triangle $\mathcal{T}$:

$$\frac{n}{\sin x} = \frac{n+2}{\sin 2x} = \frac{n+1}{\sin(\pi-3x)}$$

Or pour tout x , $\sin(\pi-3x) = \sin 3x$ (angles associés) donc

$$\frac{n}{\sin x} = \frac{n+2}{\sin 2x} = \frac{n+1}{\sin 3x}$$

- (b) On a d'après la question précédente :

$$\frac{n}{\sin x} = \frac{n+2}{\sin 2x} \iff \frac{n}{\sin x} = \frac{n+2}{2 \sin x \cos x}$$

D'où, en utilisant l'égalité des produits en croix et en simplifiant par $\sin x$ qui est non nul

$$\boxed{2 \cos x = \frac{n+2}{n}}$$

On utilise la question 1) pour remplacer $\sin 3x$ par $(4 \cos^2 x - 1) \sin x$ dans

$$\frac{n}{\sin x} = \frac{n+1}{\sin 3x}$$

Ainsi,

$$\frac{n}{\sin x} = \frac{n+1}{(4 \cos^2 x - 1) \sin x}$$

De même que précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} 4 \cos^2 x - 1 = \frac{n+1}{n} &\iff 4 \cos^2 x = \frac{n+1}{n} + 1 \\ &\iff \boxed{4 \cos^2 x = \frac{2n+1}{n}} \end{aligned}$$

3. (a) D'après la question précédente

$$4 \cos^2 x = (2 \cos x)^2 \iff \frac{2n+1}{n} = \left(\frac{n+2}{n}\right)^2$$

En multipliant la relation précédente par n qui est non nul (car n est la longueur d'un côté de triangle), on trouve que n vérifie nécessairement

$$n(2n+1) = (n+2)^2$$

c'est à dire

$$2n^2 + n = n^2 + 4n + 4 \iff \boxed{n^2 - 3n - 4 = 0}$$

(b) $n^2 - 3n - 4 = (n+1)(n-4)$ donc l'équation précédente a deux solutions, $n = -1$ et $n = 4$. La seule solution positive est $n_0 = 4$. C'est la seule qui a un sens, étant donné que n représente la longueur d'un côté de triangle.

(c) D'après les questions précédentes, le triangle $\mathcal{T}$, s'il existe, a des côtés de longueurs 4, 5 et 6. Il est donc unique.

Réciproquement, $4 + 5 > 6$ donc les entiers 4, 5 et 6 permettent bien de définir un triangle. Il reste à vérifier la condition sur les angles, c'est-à-dire que l'angle opposé au plus grand côté est le double de l'angle opposé au plus petit côté, α .

On choisit de noter $a = AB$ le côté de mesure 4, $b = BC$ le côté de mesure 5 et $c = CA$ le côté de mesure 6. On note enfin γ la mesure de $\widehat{C}$.

Avec ces notations, la condition à montrer sur les angles est $\gamma = 2\alpha$.

On applique la loi des sinus dans le triangle ABC :

$$\frac{6}{\sin \gamma} = \frac{4}{\sin \alpha} \iff \boxed{\sin \gamma = \frac{3}{2} \sin \alpha}.$$

On écrit ensuite la formule d'Al-Kashi pour le côté BC :

$$16 = 25 + 36 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos \alpha \iff \boxed{\cos \alpha = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}}$$

puis pour le côté AB :

$$36 = 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos \gamma \iff \boxed{\cos \gamma = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}}$$

On remarque alors que :

$$\sin \gamma = 2 \times \cos \alpha \sin \alpha$$

c'est-à-dire avec les formules de duplication

$$\sin \gamma = \sin 2\alpha.$$

On remarque aussi que

$$2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{9}{16} - 1 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = \cos \gamma$$

Or, toujours d'après les formules de duplication:

$$2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

d'où $\cos \gamma = \cos 2\alpha$.

On déduit enfin de $\cos \gamma = \cos 2\alpha$ et $\sin \gamma = \sin 2\alpha$ l'égalité souhaitée

$$\boxed{\gamma = 2\alpha}.$$

Le triangle $\mathcal{T}$ de côtés 4, 5 et 6 est bien un triangle trigonométrique.

Bonus : Suites et trigonométrie (Hors barème)

Soit a un réel tel que $0 < a < \frac{\pi}{4}$. On considère (u_n) la suite définie par $u_1 = 1 + \frac{1}{2\sin^2 a}$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \cos(2a)u_n + 1$.

On **admet** que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \frac{1}{2\sin^2(a)}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
2. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes ?
Justifier la réponse et calculer leurs limites éventuelles.
3. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$

Solution: On commence par démontrer le résultat admis, pour ce qui sont intéressés...

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété dépendant de l'entier n : « $u_n > 1$ ».

Initialisation $\frac{1}{2\sin^2 a} > 0$ donc $u_1 > 1$. $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain n . Montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$a \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ donc $2a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui signifie que $0 < \cos(2a) < 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_n > 1$$

d'où en multipliant par $\cos(2a)$, qui est strictement positif,

$$\cos(2a) < \cos(2a)u_n$$

puis $\cos(2a) + 1 < u_n + 1$ c'est-à-dire $\cos(2a) + 1 < u_{n+1}$.

Comme $\cos(2a) > 0$, cette inégalité implique en particulier $u_{n+1} > 1$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion $\mathcal{P}_1$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{1}{2 \sin^2 a} \\ &= \cos(2a) u_n + 1 - \frac{1}{2 \sin^2 a} \end{aligned}$$

De plus, $u_n = v_n + \frac{1}{2 \sin^2 a}$. D'où,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \cos(2a) \left(v_n + \frac{1}{2 \sin^2 a} \right) + 1 - \frac{1}{2 \sin^2 a} \\ &= \cos(2a) v_n + \frac{\cos(2a) + 2 \sin^2 a - 1}{2 \sin^2 a} \\ &= \cos(2a) v_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est la suite géométrique de raison $q = \cos(2a)$ et de premier terme

$$v_1 = u_1 - \frac{1}{2 \sin^2 a} = 1 + \frac{1}{2 \sin^2 a} - \frac{1}{2 \sin^2 a} = 1$$

2. Comme (v_n) est géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est donné par :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = (\cos(2a))^{n-1}$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = v_n + \frac{1}{2 \sin^2 a} = (\cos(2a))^{n-1} + \frac{1}{2 \sin^2 a}$$

Comme $0 < q < 1$, la suite géométrique (v_n) converge vers 0.

On en déduit, par limite de somme, que (u_n) converge vers $\frac{1}{2 \sin^2 a}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n v_k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \sin^2 a} = \left(\sum_{k=1}^n v_k \right) + \frac{n}{2 \sin^2 a}$$

On sait que (v_n) est géométrique et $q = \cos(2a) \neq 1$, donc

$$\sum_{k=1}^n v_k = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - (\cos(2a))^n}{1 - (\cos(2a))}$$

Or,

$$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$$

d'où

$$1 - \cos(2a) = 2 \sin^2 a$$

et

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1 + n - (\cos(2a))^n}{2 \sin^2 a}$$

$-1 < \cos(2a) < 1$, la suite $(\cos(2a))^n$ tend vers 0 donc, par limite de somme, étant donné que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$, on a $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty}$.