

Devoir sur table n°6

Mercredi 6 février 2025 - 1 h 50 min

L'utilisation d'une calculatrice **de type Collège** est autorisée.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

1. On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) vérifiant les affirmations suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n \leq w_n$

Dire si chacune des affirmations est vraie ou fausse, en justifiant :

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$
- (d) La suite (v_n) n'a pas de limite.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 500$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,5u_n$

Parmi les affirmations suivantes, indiquer celles qui sont vraies, en justifiant **brièvement** :

- (a) Il existe un nombre entier naturel n tel que $u_n < 100$.
- (b) Pour tout nombre entier naturel n , $u_n < 100$.
- (c) Il existe un nombre entier naturel p tel que $u_p = 0$.
- (d) Il existe un nombre entier naturel p tel que, pour tout nombre entier naturel $n \geq p$, $u_n < 5$.

Exercice 2 : Un raisonnement par récurrence avec des sommes (3 points)

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^n k(k-1)$$

Ainsi $S_1 = 0$ et $S_2 = 2$.

1. Déterminer S_3 en détaillant les calculs.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$

Exercice 3 : Suites et algorithmique (6,5 points)

On considère la suite numérique (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \text{ et } v_0 = 1.$$

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite de v_0 à v_n . Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel, en justifiant la réponse :

Algorithme A

```

Lire n
v ← 1
Pour i allant de 1 à n
    v ← 9/(6 - v)
Afficher v

```

Algorithme B

```

Lire n
Pour i allant de 1 à n
    v ← 1
    Afficher v
    v ← 9/(6 - v)

```

Algorithme C

```

Lire n
v ← 1
Pour i allant de 1 à n
    Afficher v
    v ← 9/(6 - v)

```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.
3. Le but de cette question est d'étudier la suite (v_n) . On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n , par $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.

- (a) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
- (b) En déduire l'expression de w_n , puis celle de v_n , en fonction de n .
- (c) Déterminer les limites éventuelles de (w_n) et de (v_n)

Exercice 4 : Trigonométrie (7,5 points)

On appelle *triangle trigonométrique* (noté $\mathcal{T}$) tout triangle dont les mesures des côtés sont trois entiers consécutifs et tel que l'angle opposé au plus grand côté est le double de l'angle opposé au plus petit côté. On va montrer qu'un tel triangle existe et qu'il est unique (plus précisément que tous ces triangles ont les mêmes dimensions). Pour cela, on note n la longueur du plus petit côté et α celle de l'angle opposé au plus petit côté.

1. Montrer que, pour tout réel x ,

$$\sin(3x) = (4(\cos x)^2 - 1) \sin x$$

2. (a) Montrer que, si un triangle $\mathcal{T}$ existe, alors

$$\frac{n}{\sin(\alpha)} = \frac{n+1}{\sin(3\alpha)} = \frac{n+2}{\sin(2\alpha)}$$

- (b) En déduire que, si un triangle $\mathcal{T}$ existe, alors $2 \cos(\alpha) = \frac{n+2}{n}$.

- (c) Déduire de la question 1 que, si un triangle $\mathcal{T}$ existe, alors $4 \cos^2(\alpha) = \frac{2n+1}{n}$

3. (a) En déduire que : $n^2 - 3n - 4 = 0$

- (b) Montrer qu'il existe un unique entier positif n_0 tel que $(n_0)^2 - 3n_0 - 4 = 0$.

- (c) Vérifier qu'à cet entier n_0 correspond bien un triangle $\mathcal{T}$.

Bonus : Suites et trigonométrie (Hors barème)

Soit a un réel tel que $0 < a < \frac{\pi}{4}$. On considère (u_n) la suite définie par $u_1 = 1 + \frac{1}{2 \sin^2 a}$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \cos(2a) u_n + 1$.

On **admet** que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \frac{1}{2 \sin^2(a)}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
2. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes ?
Justifier la réponse et calculer leurs limites éventuelles.
3. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$